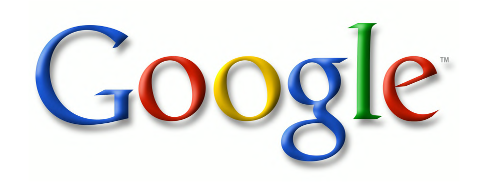



Stanford University Libraries
3 6105 027 650 212


T725

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES,
DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ,

SOUS LES AUSPICES

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DE LA MUNICIPALITÉ DE TOULOUSE,

AVEC LE CONCOURS

DES CONSEILS GÉNÉRAUX DE LA HAUTE-GARONNE ET DES HAUTES-PYRÉNÉES.

TOME I. – ANNÉE 1887.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, 55.

1887

P

AVERTISSEMENT.

La Faculté des Sciences de Toulouse entreprend la publication d'Annales consacrées aux Mathématiques et aux Sciences physiques.

Elle se propose d'insérer dans ce Recueil des Mémoires relatifs à la Physique, à la Chimie, aux Mathématiques pures et appliquées, écrits le plus souvent par les professeurs de la Faculté. Plusieurs de nos anciens collègues, qui occupent un rang élevé dans la Science française, et des géomètres illustres, dont nous avons eu l'honneur d'être les élèves, ont bien voulu nous promettre leur concours.

Indépendamment des Mémoires proprement dits, nous donnerons des articles de Bibliographie, mûrement élaborés, relatifs à des questions importantes offrant un réel intérêt d'actualité scientifique. Chacun de ces articles comprendra, avec un exposé systématique de la question elle-même, l'énumération des travaux qui s'y rapportent.

Nous espérons offrir ainsi de nouvelles ressources à tous ceux qui cultivent les Sciences, notamment faciliter leur tâche aux professeurs des lycées et collèges qui voudront poursuivre les études commencées à la Faculté ou à l'École Normale. Si quelques-uns trouvent dans nos articles bibliographiques des guides sûrs, notre but sera pleinement atteint.

En créant de toutes pièces une publication nouvelle, nous n'ignorons pas contre quelles difficultés de toutes sortes nous aurons à lutter. Les encouragements de l'État, de la ville de Toulouse, des départements de la Haute-Garonne et des Hautes-Pyrénées nous ont permis de créer ces Annales; nous comptons, pour les faire vivre, sur le concours de tous ceux qu'intéresse le développement de la Science française. Le grand effort fait, depuis

quelques années, par les pouvoirs publics pour les progrès de l'enseignement doit avoir pour première conséquence un accroissement notable de la production scientifique de notre pays. Nous adressons à tous les amis de l'Université de France le plus pressant appel; nous avons pu prendre l'initiative de ces Annales, il leur appartient de les faire prospérer.

LE COMITÉ DE RÉDACTION.

REVUE DE PHYSIQUE.

QUESTIONS D'HYDRODYNAMIQUE,

PAR M. MARCEL BRILLOUIN,

Professeur de Physique à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Dans cette première Revue de Physique, je me propose d'exposer les principaux progrès accomplis dans l'étude des phénomènes de mouvement des liquides depuis une vingtaine d'années. C'est l'illustre professeur de l'Université de Berlin, M. von Helmholtz, qui, dans un Mémoire publié en 1858 et dans une courte Note de 1868, a émis les deux idées capitales, origine de nombreux et importants travaux des Kirchhoff, des Rayleigh, des J. Thomson, et des spéculations d'un génie si original de Sir W. Thomson.

Malgré l'exactitude manifeste des équations de l'Hydrodynamique des fluides parfaits ou peu visqueux, certains phénomènes d'une observation journalière, la formation et la persistance des anneaux tourbillonnants, celle des jets, étaient restés sans explication. Aujourd'hui ces phénomènes sont expliqués dans leurs caractères généraux, et il ne semble pas douteux que les nombres fournis par l'expérience ne soient eux-mêmes conformes à la théorie lorsque les efforts des mathématiciens permettront de traiter complètement quelques cas particuliers de ces problèmes singulièrement difficiles.

Voici l'ordre adopté dans cette exposition :

I. Tourbillons dans les fluides parfaits. Théorie. Expériences. Applications.

II. Écoulement des liquides. Jets. Mouvement d'un solide ou d'un tourbillon dans un liquide.

III. Frottement des fluides. Expériences. Théorie.

IV. Bibliographie générale.

CHAPITRE I.

TOURBILLONS DANS LES FLUIDES PARFAITS.

(Wirbelbewegungen. — Wirbelfäden. — Rotational motion. — Vortex motion, etc.).
Cauchy. — Stokes. — Von Helmholtz. — Sir W. Thomson. — Kirchhoff. — J.-C. Maxwell.
Lamb. — Lord Rayleigh. — Beltrami.

1. *Propriétés analytiques.* — Les trois projections u, v, w d'une grandeur dirigée q, finies et continues, ainsi que leurs dérivées premières, dans toute une région de l'espace, jouissent de certaines propriétés générales indépendantes de la nature de la quantité représentée.

Green. — Soit φ une fonction à détermination unique, finie, et continue ainsi que ses dérivées premières à l'intérieur d'une surface fermée S; on a

$$\begin{aligned}\iiint\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+v\frac{\partial\varphi}{\partial y}+w\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\\=\iint\varphi(lu+mv+nw)\,dS-\iiint\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.\end{aligned}$$

Les intégrales triples sont étendues à tout le volume; l'intégrale double à toute la surface fermée S; l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface S.

Stokes. — Une courbe fermée simple s limite une aire S qui n'isole aucune portion de l'espace. On a

$$\int\left(u\frac{\partial x}{\partial s}+v\frac{\partial y}{\partial s}+w\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds=\iint\left[l\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+m\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+n\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dS;$$

l'intégrale simple est étendue à la courbe fermée, l'intégrale double à l'aire limitée par cette courbe. La direction positive de la normale à la surface S est liée au sens de parcours de la courbe fermée s, comme la force magnétique au sens d'un courant électrique, par la règle d'Ampère. L'énoncé général de cette proposition semble dû à Stokes (1845), bien que des cas particuliers aient été fréquemment employés auparavant, notamment par Ampère dans toute la théorie de l'Électrodynamique.

On peut remplacer les trois fonctions u, v, w par trois autres d'une signification plus simple. Deux de ces transformations qui servent dans toute la Physique

mathématique ont été employées pour la première fois, l'une par Stokes (1849), l'autre par Clebsch (*Crelle*, t. LVI, 1858) en Hydrodynamique.

Transformation de *Stokes-Helmholtz :*

$$u = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z},$$

$$v = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x},$$

$$w = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y},$$

et l'on peut assujettir les trois fonctions L, M, N à une condition. On choisit ordinairement la relation solénoïdale

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0.$$

Transformation de *Clebsch* (¹) :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\lambda \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial(\varphi + \lambda\psi)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \lambda}{\partial x}$$

avec les deux analogues.

Les propriétés générales de ces deux transformations sont exposées méthodiquement dans la *Theorica delle Forze newtoniane* de E. Betti, p. 304-313.

Parmi les neuf quantités qui définissent les variations de u, v, w en passant d'un point à un point voisin, certaines sont susceptibles d'expressions simples :

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \Delta P = \Delta(\varphi + \lambda\psi) \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right);$$

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = -\Delta L = 2\left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right),$$

avec les expressions analogues pour $\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, que nous représentons par 2η, 2ζ. La direction ξ, η, ζ est tangente aux deux familles de surfaces λ, ψ.

Pour la brièveté du langage, je regarderai dès à présent u, v, w comme représentant la vitesse actuelle du fluide en un point (x, y, z), suivant la notation d'Euler. Si l'on connaît ces trois fonctions des coordonnées et du temps, on aura la position initiale x_0, y_0, z_0 de la masse liquide qui occupe actuellement la position (x, y, z), en intégrant le système d'équations du premier ordre trop souvent passé sous si-

(¹) Cette transformation n'est qu'un cas particulier d'une transformation étudiée par M. Hill, en 1881, au *Quarterly Journal of Mathematics*.

lence

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} + u\frac{\partial x_0}{\partial x} + v\frac{\partial x_0}{\partial y} + w\frac{\partial x_0}{\partial z} = 0, \quad \ldots,$$

que fournissent directement des considérations cinématiques, sous les conditions $x_0 = x, y_0 = y, z_0 = z$ pour $t = 0$.

2. Pour une masse liquide dont la forme actuelle est celle d'un cube, à côtés parallèles aux axes coordonnés, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ représentent les vitesses de dilatation linéaire des côtés, θ la vitesse de dilatation cubique, $\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \cdots$ les vitesses de glissement relatif des faces parallèles, et ξ, η, ζ les vitesses de rotation du cube autour de parallèles aux axes passant par son centre de gravité. On peut démontrer facilement (¹) que les quantités ξ, η, ζ sont les vitesses de rotation que prendrait tout élément de volume à moments d'inertie égaux s'il était instantanément solidifié; ce sont aussi les vitesses de rotation moyennes de cet élément, définies conformément au principe des aires, autour de parallèles aux axes, passant par son centre de gravité.

La vitesse de rotation ω, dont les composantes sont ξ, η, ζ, a donc une signification physique très nette; quand elle est nulle, u, v, w sont les dérivées en x, y, z d'une même fonction qu'on appelle le *potentiel* des vitesses. La vitesse de rotation ξ, η, ζ satisfait toujours identiquement à la condition solénoïdale

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

C'est aussi la condition d'incompressibilité d'un liquide dont les vitesses de translation seraient ξ, η, ζ; par conséquent, la somme des produits de l'élément de surface par la composante normale de la vitesse de rotation est nulle pour toute surface fermée. Pour une aire limitée à une courbe fermée, la somme de ces produits est indépendante de la forme de la surface; elle ne dépend que de la courbe contour, et sa valeur est, d'après le théorème de Stokes, égale à l'intégrale curviligne

$$I = \int \left(u\frac{dx}{ds} + v\frac{dy}{ds} + w\frac{dz}{ds} \right) ds,$$

que nous appellerons, avec Sir W. Thomson, *circulation* le long de la courbe fermée.

Appelons *ligne-tourbillon* une ligne qui a pour tangente en chaque point la vitesse de rotation ω correspondant à ce point; il ne passe en général qu'une ligne-tourbillon par chaque point de l'espace. La surface engendrée par une

(¹) STOKES, *Math. and phys. Papers*, t. I, p. 80, 112; 1845. — HELMHOLTZ, *Abh.*, t. I, p. 104.

ligne-tourbillon qui se déplace le long d'une courbe fermée est un tube-tourbillon clos latéralement, ouvert seulement aux deux bouts. La composante de la vitesse de rotation normale à la surface latérale est nulle par définition; la circulation dans un circuit fermé qui entoure le tube, en rencontrant une fois et une seule chacune des génératrices, est la même, en quelque point du tube qu'on transporte ce circuit. Nous appellerons *intensité* du tube cette valeur commune de la *circulation*. De là résulte qu'un tube ne peut pas se terminer au milieu du fluide; il se ferme sur lui-même en forme d'anneau, ou bien s'étend jusqu'à la paroi ou jusqu'aux surfaces sur lesquelles u, v, w cessent d'être continues et d'avoir des dérivées. Dans ce cas encore on peut concevoir que le tube se ferme soit hors de la surface, soit dans la surface même.

Ainsi la partie de l'espace dans laquelle existent des rotations doit être conçue comme divisée en anneaux-tourbillons fermés, d'intensité uniforme dans toute leur longueur. C'est la première partie de la proposition importante établie pour la première fois par M. von Helmholtz dans le cas des fluides incompressibles (1858). La démonstration suppose uniquement la continuité de u, v, w, mais non celle de ξ, η, ζ; si la rotation est discontinue, le tube présente au point correspondant un angle fini.

3. *Surfaces de discontinuité.* — La quantité u, v, w peut avoir des valeurs différentes u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, de part et d'autre de certaines surfaces particulières Σ. La direction λ, μ, ν de la normale à la surface Σ traverse celle-ci du côté 1 au côté 2. La discontinuité est définie par trois quantités $u_2 - u_1$, $v_2 - v_1$, $w_2 - w_1$, auxquelles on peut en substituer trois autres analogues aux dilatations et aux rotations

$$\Theta = \lambda(u_2 - u_1) + \mu(v_2 - v_1) + \nu(w_2 - w_1)$$

et

$$\begin{aligned} 2\Xi &= \mu(w_2 - w_1) - \nu(v_2 - v_1), \\ 2\mathrm{H} &= \nu(u_2 - u_1) - \lambda(w_2 - w_1), \\ 2\mathrm{Z} &= \lambda(v_2 - v_1) - \mu(u_2 - u_1), \end{aligned}$$

soumises à la relation

$$\lambda\Xi + \mu\mathrm{H} + \nu\mathrm{Z} = 0,$$

qui exprime que la direction Ξ, H, Z est tangente à la surface Σ; elle est en outre perpendiculaire à l'accroissement fini $u_2 - u_1$, $v_2 - v_1$, $w_2 - w_1$, de u, v, w (Helmholtz, 1858).

Dans l'interprétation hydrodynamique, on regarde ordinairement la densité superficielle de la matière comme constamment nulle; alors Θ est nul.

Il n'en serait pas nécessairement ainsi en Électrostatique ou même en Hydrodynamique à la surface de séparation de deux liquides différents. Mais la considération de ces différences nous entraînerait trop loin de notre sujet.

Les quantités Ξ, H, Z sont de même nature que les produits des quantités ξ, η, ζ par une longueur. Le produit d'un élément de longueur pris dans la surface Σ par la composante de ΞHZ normale à cet élément est une *intensité*.

Les trajectoires orthogonales de la différence $u_2 - u_1$, $v_2 - v_1$, $w_2 - w_1$, qui sont tangentes en chaque point à Ξ, H, Z, sont des lignes-tourbillons; l'espace compris entre deux lignes-tourbillons est un fuseau-tourbillon; la surface Σ elle-même une couche de tourbillons. Mais l'intensité d'un fuseau-tourbillon n'est pas nécessairement constante dans toute sa longueur. Soient I_1, I_2 les intensités des tubes-tourbillons qui découpent sur la surface Σ une longueur finie d'un fuseau-tourbillon, et δJ l'accroissement de l'intensité du fuseau-tourbillon parcouru dans le sens positif; on a, par la différence des circulations,

$$\delta J + I_2 - I_1 = 0.$$

Les tubes-tourbillons se ferment tous, en partie par une continuation du tube de l'autre côté de la surface Σ, en partie par un fuseau situé sur cette surface. Pourtant, si les deux valeurs de la vitesse de rotation normale

$$\lambda\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \nu\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

sont partout égales de part et d'autre, les fuseaux forment un système superficiel fermé ou indéfini, à intensité uniforme, complètement indépendant des tubes; et ceux-ci traversent la surface sans variation d'intensité. Enfin, si d'un côté de la surface il n'y a pas de rotation, tous les tubes de l'autre côté se ferment par les fuseaux superficiels.

Ce dernier cas se présente en particulier lorsque tout le fluide contenu à l'intérieur de la surface de discontinuité se meut comme un solide indéformable; les vitesses superficielles du fluide intérieur sont alors identiques aux vitesses que prendrait la surface d'un solide de même forme, dans son mouvement d'ensemble. M. Beltrami a traité en détail (1874) le cas où la surface de discontinuité appartient au système des surfaces homofocales du second ordre.

4. Si l'on connaît les vitesses de rotation ξ, η, ζ et la vitesse de dilatation cubique θ à l'intérieur d'une surface fermée, ainsi que la composante normale de la vitesse de translation $lu + mv + nw$ sur la surface limite, les trois fonctions u, v, w sont entièrement déterminées dans tout l'intérieur. En effet, il ne peut y avoir deux solutions différentes 1, 2. La différence des vitesses $u_1 - u_2$, ... a un potentiel V, ($\xi_1 - \xi_2 = 0$, ...), qui satisfait à $\Delta V = 0$, ($\theta_1 - \theta_2 = 0$), dans tout l'intérieur, et à $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$, sur la surface, ($lu_1 + mv_1 + nw_1 - lu_2 - mv_2 - nw_2 = 0$). On sait, par le théorème de Green, que ce potentiel V est constant, et la différence des vitesses nulle, si la région considérée est simple.

Si la région est multiple d'ordre $n+1$, il faut connaître en outre les valeurs des n constantes cycliques (Thomson, 1869). Une région est multiple lorsque certains circuits fermés ne peuvent pas être réduits à un point sans sortir de la région. La circulation sur un de ces circuits peut avoir une valeur différente de zéro, bien que ξ, η, ζ soient nuls; mais, pour tous les circuits réductibles les uns aux autres, la circulation est la même. S'il existe n circuits irréductibles distincts, la région est multiple d'ordre $n+1$; les n valeurs distinctes de la circulation s'appellent les n constantes cycliques. Tel est un volume sphérique contenant un nombre quelconque de solides pleins, et des solides percés d'un ou plusieurs trous, comme des anneaux, des grillages, etc., de telle sorte que le nombre des trous distincts soit n. L'extérieur d'un cylindre indéfini, l'extérieur ou l'intérieur d'un tore sont des espaces multiples du deuxième ordre.

Quand les constantes cycliques sont données, la différence des deux solutions a un potentiel uniforme, puisque la circulation est alors nulle dans tous les circuits; le théorème de Green (¹) montre que les deux solutions sont identiques.

Il en est de même s'il y a des surfaces de discontinuité, pourvu que l'on connaisse le long de ces surfaces la différence des valeurs $u_2 - u_1$, $v_2 - v_1$, $w_2 - w_1$.

Espace infini. — Les fonctions P, L, M, N peuvent être mises sous forme d'intégrales quand aucune paroi située à distance finie ne limite l'espace (Stokes, 1849) :

$$P = -\frac{1}{4\pi}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\iiint \frac{\theta}{r}\,dx\,dy\,dz\\ \displaystyle+\iint \frac{\Theta}{r}\,dS,\end{array}\right. \qquad L = -\frac{1}{2\pi}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\iiint \frac{\xi}{r}\,dx\,dy\,dz\\ \displaystyle+\iint \frac{\Xi}{r}\,dS,\quad \ldots\end{array}\right.$$

Les intégrales triples sont étendues à tout l'espace; les intégrales doubles aux surfaces de discontinuité. Stokes n'avait pas tenu compte de ces dernières. On suppose que ξ, η, ζ, θ, Ξ, H, Z, Θ n'ont de valeurs finies qu'à distance finie; à l'infini, u, v, w sont nuls; ξ, η, ζ, Ξ, H, Z doivent d'ailleurs satisfaire aux conditions n° 3.

On peut regarder la vitesse en un point comme la résultante de vitesses dues aux dilatations cubiques θ et aux rotations ω dans tout l'espace; chaque élément de volume dV contribue ainsi pour sa part à la production de la vitesse en un point quelconque. La part due à la dilatation θ est identique à la force magnétique due à une distribution de densité $-\frac{\theta}{4\pi}$; ce qui provient de la vitesse de rotation ω est identique à la force électromagnétique produite, suivant la loi de Laplace, par une

(¹) $u = \frac{\partial V}{\partial x}$, $v = \frac{\partial V}{\partial y}$, $w = \frac{\partial V}{\partial z}$, $\Delta V = 0$, $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$, $\varphi = V$.

distribution de courants électriques $\frac{\xi}{2\pi}$, $\frac{\eta}{2\pi}$, $\frac{\zeta}{2\pi}$ [1]. La loi générale de distribution de ces forces magnétiques est si familière au physicien, il est si facile de réaliser le spectre magnétique de courants distribués comme on veut, que cette ingénieuse remarque de Stokes fournit sans calcul l'explication de bien des phénomènes.

Espace limité simple. — La condition à la paroi n'est pas satisfaite par les valeurs de P, L, M, N écrites plus haut; il faut les complèter. Malheureusement on ne sait pas, jusqu'à présent, le faire au moyen de la seule donnée nécessaire, la vitesse normale. M. Boltzmann (1871) a fourni à ce sujet quelques indications que je vais reproduire en les généralisant. Supposons que l'on connaisse les trois composantes de la vitesse sur la surface limite; ce sont des données surabondantes, on ne saurait donc les prendre au hasard. Remplaçons la surface limite par une surface de discontinuité et la matière située au delà par le fluide lui-même indéfiniment étendu.

Premier cas. — *La paroi est rigide et immobile.* — On peut supposer le fluide extérieur complètement immobile. Les termes complémentaires sont, en faisant u_2, v_2, w_2 nuls,

$$P' = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\theta\,dS}{r}, \qquad L' = -\frac{1}{2\pi}\iint\frac{\Xi\,dS}{r}, \qquad \dots;$$

P' est nul dans les applications hydrodynamiques.

Deuxième cas. — *La paroi extérieure est rigide et immobile. Les parois internes sont mobiles comme des corps solides.* — Les termes complémentaires ont la même forme; u_2, v_2, w_2 sont nuls en dehors de la surface externe; dans les corps solides, u_2, v_2, w_2 sont les vitesses superficielles elles-mêmes de ces corps.

Troisième cas. — *Les parois internes sont mobiles et déformables; elles enferment un volume constant.* — On peut se donner arbitrairement les vitesses internes satisfaisant à la condition d'incompressibilité et fournissant les valeurs de la vitesse normale de la paroi; on en déduit les rotations internes ξ_2, η_2, ζ_2, et les rotations superficielles Ξ, H, Z; les termes complémentaires comprennent

---

[1] Il est facile de s'en assurer en réunissant sous le même signe d'intégration les termes tels que

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}.$$

Dans la région occupée par les courants, cette force, comme on sait, n'a pas de potentiel; mais, dans l'espace extérieur aux courants, elle en a un, $\mathfrak{P}$, qui permet de remplacer $\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}$ par $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x}$. Ce potentiel $\mathfrak{P}$ est en général multiple, tandis que le potentiel P est simple.

des intégrales superficielles et des intégrales en volume; le terme complémentaire P′ est nul. Tel est le plan adopté par M. Boltzmann.

Quatrième cas. — *Le volume enfermé par les parois internes varie d'une manière connue. La paroi externe est déformable.* — La méthode générale consiste à ajouter aux rotations et dilatations connues dans une certaine région des rotations et dilatations étendues à tout le reste de l'espace, en partie arbitraires, mais satisfaisant aux conditions relatives à la paroi, de manière à retomber sur le cas de Stokes. On peut se donner les valeurs u, v, w au dehors d'une manière entièrement arbitraire, pourvu qu'on tienne compte des surfaces de discontinuité dans les termes complémentaires. Parmi les conditions qu'on pourrait s'imposer, se trouvent l'uniformité de la dilatation cubique, qui facilite en général le calcul du terme complémentaire P′, l'égalité des vitesses normales aux parois qui supprime dans P′ l'intégrale superficielle. On pourrait même ajouter que les vitesses aient un potentiel, ce qui achèverait de déterminer le problème, sans le rendre plus facile. Nous verrons plus loin (Chap. II) l'utilité de certaines de ces conditions dans le problème dynamique.

5. *Équations du mouvement d'un corps continu.* — Suivant les notations d'Euler, nous appelons u, v, w les vitesses actuelles du point matériel qui passe en x, y, z, et $\frac{D}{Dt}$ la dérivée par rapport au temps d'une fonction relative à la masse mobile et non au point xyz de l'espace. On sait qu'on a symboliquement

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}.$$

Les équations du mouvement d'un fluide parfait sont

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + X = \frac{Du}{Dt},$$

et les deux symétriques; p est la pression normale, ρ la densité et X, Y, Z la force extérieure qui agit sur l'unité de masse. On doit y joindre l'équation de conservation de la matière

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\theta = 0.$$

Enfin il faut exprimer les propriétés physiques du fluide que l'on étudie. Les cas les plus simples sont ceux où, par suite des conditions particulières du problème, on peut regarder la pression comme une fonction de la densité; c'est ce qui arrive lorsque la température du fluide est uniforme dans toute son étendue, ou encore lorsque aucun échange de chaleur ne se produit entre les éléments de volume

contigus. Ces conditions ne sont jamais remplies qu'approximativement, et, lorsqu'on veut serrer de plus près la réalité, on rencontre des difficultés considérables; au lieu d'une relation finie unique entre la pression et la densité, on doit écrire plusieurs équations différentielles comprenant la température et faisant intervenir la conductibilité calorifique. Helmholtz et Kirchhoff ont abordé sous cette forme quelques problèmes d'acoustique. Bjerkness a particulièrement étudié le moyen de conserver une équation finie unique, lorsque les mouvements sont périodiques (*Acta mathematica,* 1884).

Dans un corps quelconque, susceptible de grandes déformations et d'écoulement sans rupture, les forces élastiques ne sont pas nécessairement normales; on doit remplacer dans les équations d'Euler les termes, tels que $-\frac{\partial p}{\partial x}$, par les groupes de termes $\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial T_3}{\partial y}+\frac{\partial T_2}{\partial z}$, suivant les notations de Lamé. Reste la difficulté physique de découvrir les relations de compressibilité, de dilatation et de frottement qui lient les pressions normales et tangentielles à la déformation et à la vitesse de déformation, ainsi que les relations calorimétriques correspondantes. Lorsque l'état d'équilibre ne dépend que des pressions normales, on a admis que les actions tangentielles et les excès des actions normales sur leur moyenne ne dépendent que de la vitesse de déformation et non de la déformation elle-même : c'est ce qui arrive pour tous les corps gazeux ou franchement liquides; l'expérience a même montré que, dans des limites fort étendues, ces actions sont proportionnelles aux vitesses de déformation (Chap. III). On a alors

$$N_1 = 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{3}\theta\right)-p, \qquad T_1=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

Mais il n'en est plus de même pour les cires, les résines liquéfiées, les solides mous sous les pressions employées par M. Tresca. Les oscillations de flexion et de torsion de fils métalliques fins révèlent déjà des actions de ce genre, dont les lois élémentaires sont encore inconnues malgré de nombreuses expériences. La suite de cet article fera comprendre sur un sujet beaucoup plus simple le genre de difficultés que l'on rencontre, même pour les fluides parfaits, dès que l'amplitude du mouvement exige l'emploi des équations différentielles complètes (Chap. II).

Les forces extérieures X, Y, Z ont généralement un potentiel V; une seule exception importante se présente, quand le liquide est parcouru par des courants électriques.

Enfin il faudrait écrire les équations à la surface : elles comprennent une équation cinématique, exprimant la conservation de la vitesse normale à travers la surface, et une équation statique, exprimant que la différence des pressions p_1, p_2, de part et d'autre de la surface, est égale au produit de la tension superficielle A

par la courbure moyenne c. On néglige généralement l'influence de la tension superficielle quand la courbure de la surface de contact est un peu grande [1].

6. Considérons d'abord un fluide sans frottement, soumis à des forces extérieures douées d'un potentiel à valeur unique en chaque point, dont la pression est une fonction déterminée de la densité. Une combinaison facile des équations d'Euler donne

$$\frac{D}{Dt}\int_A^B\left(u\frac{\partial x}{\partial s}+v\frac{\partial y}{\partial s}+w\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds=\left(\frac{1}{2}q^2-V-\int\frac{dp}{\rho}\right)_A^B,$$

en tenant compte de la relation

$$\frac{D(u\,dx)}{Dt}=\frac{Du}{Dt}dx+u\,du,$$

l'intégration est étendue à une portion finie de courbe, mobile avec le liquide [2] (Thomson, 1869). La fonction entre parenthèses est uniforme, et le second membre s'annule quand la courbe est fermée. Ainsi la circulation dans une courbe fermée mobile avec le liquide ne change pas avec le temps. Il en est de même de l'intensité du tube-tourbillon que cette courbe environne.

Dans un espace où les vitesses u, v, w sont continues, un anneau tourbillon est toujours formé de la même matière et doué d'une intensité invariable.

La première démonstration de cette propriété pour les liquides est due à Helmholtz (1858). Dans ses Leçons de Physique mathématique (1877), Kirchhoff a déduit le même résultat de la marche même au moyen de laquelle Cauchy avait établi, pour la première fois, rigoureusement, le principe de la conservation du potentiel des vitesses dû à Lagrange. La méthode d'Helmholtz peut être facilement étendue à tous les fluides (Nanson, 1885). On montre que la vitesse de dilatation linéaire dans la direction de la vitesse de rotation ξ, η, ζ est proportionnelle à la vitesse d'accroissement du rapport $\frac{\omega}{\rho}$ de la vitesse de rotation à la densité; ce qui

---

(1) Cette manière d'écrire les équations suppose essentiellement qu'il n'y a pas de variation rapide de densité au voisinage de la surface; les équations générales seraient une équation de conservation de la matière avec accroissement de la densité superficielle, comme en électricité statique, et trois équations dynamiques de mouvement de cette couche superficielle sous l'influence des forces qui la sollicitent. La force normale à la surface est $p_2 - p_1 + cA$; les forces tangentielles sont les variations de la tension superficielle $\frac{\partial A}{\partial s_1}$, $\frac{\partial A}{\partial s_2}$, liées aux variations de la densité superficielle par une équation de compressibilité à demander à l'expérience; les vitesses à introduire dans cette équation dynamique paraissent être les demi-sommes des vitesses du liquide et de la paroi en contact. (*Voir* Chap. III.)

(2) Tant que u, v, w sont continues, une courbe mobile avec le fluide ne peut pas se rompre; un tube, une surface fermée enferment toujours la même matière; il résulte du Mémoire de M. Hill (1881) que, pour un système quelconque de tubes mobiles avec le *liquide*, il existe une quantité constante le long du tube, et qui se conserve dans le mouvement, jouant ainsi un rôle analogue à celui de l'intensité.

équivaut à la conservation de l'intensité, si l'on tient compte de la conservation de la masse dans un élément de tube-tourbillon.

Cas où il y a des surfaces de discontinuité Σ. — Les trois démonstrations montrent que toute la partie du tube-tourbillon qui reste d'un même côté de la surface de discontinuité conserve son intensité. Deux tubes-tourbillons qui découpaient le même élément $d\Sigma$ cessent aussitôt de se correspondre : on ne peut même plus les supposer réunis par un fuseau-tourbillon pris sur la surface ; car la direction de leur déplacement relatif ($u_2 - u_1$, $v_2 - v_1$, $w_2 - w_1$) est précisément orthogonale à la direction du fuseau Ξ, H, Z. On doit donc renoncer à la conception de tubes-tourbillons qui se ferment à travers la surface de discontinuité, et regarder deux tubes-tourbillons, situés de part et d'autre de cette surface, comme entièrement indépendants ; il convient de distinguer, sur la surface Σ, deux couches situées l'une du côté (1), l'autre du côté (2), se mouvant l'une avec la vitesse u_1, v_1, w_1, l'autre avec la vitesse u_2, v_2, w_2, et fermant respectivement les tubes-tourbillons correspondants.

Un tube-tourbillon qui aboutit à une surface de discontinuité mobile avec le fluide reste toujours composé des mêmes masses (¹).

7. *Exceptions dues aux forces extérieures.* — La conservation de l'intensité des tubes-tourbillons est en défaut si le second membre de l'équation (1) ne s'annule pas pour un contour fermé mobile avec le liquide. Cela se produira si le liquide tout entier est sillonné de courants électriques permanents ou variables, soumis à leurs actions mutuelles et placés dans un champ magnétique. Soient α, β, γ les composantes de ces courants, a, b, c les composantes de la force magnétique totale ; on a

$$\rho X = b\gamma - c\beta, \qquad \rho Y = c\alpha - a\gamma, \qquad \rho Z = a\beta - b\alpha,$$

et il faut, au lieu de $V_A - V_B$, mettre

$$\int_A^B \left[(b\gamma - c\beta)\frac{\partial x}{\partial s} + (c\alpha - a\gamma)\frac{\partial y}{\partial s} + (a\beta - b\alpha)\frac{\partial z}{\partial s} \right] \frac{ds}{\rho};$$

(¹) Si la surface de discontinuité se déplace par rapport au fluide, les tubes tourbillons qui y aboutissent ne restent pas formés des mêmes masses fluides ; ils peuvent se fermer et devenir libres ; des anneaux peuvent au contraire rencontrer la surface, s'y ouvrir et s'y détruire ; pour la matière d'un tube qui passe d'un côté à l'autre de la surface de discontinuité, l'intensité change de valeur. Mais ce cas est ordinairement exclu : la masse de fluide qui traverse la surface doit y subir un changement fini de vitesse tangentielle, ce qui exige l'action d'une force tangentielle finie par unité de surface, que la capillarité ne peut produire ; il existe pourtant des actions physiques capables de produire de pareilles forces : le frottement superficiel, les actions électrostatiques sur une couche superficielle d'électricité non en équilibre, les actions magnétiques sur une couche mince des courants électriques. Ces cas exceptés, une surface de discontinuité sépare deux masses de fluides à jamais distinctes.

cette intégrale n'est pas nulle, en général, pour un circuit fermé, comme on s'en assure facilement sur un exemple simple. Donc, dans un fluide parcouru par des courants électriques :

1° La circulation n'est pas invariable dans un circuit fermé qui se meut avec le fluide. Il en est de même de l'intensité relative à une portion de surface limitée. Elle peut croître indéfiniment si le mouvement maintient la même disposition géométrique des lignes-tourbillons par rapport aux lignes de force magnétique et aux courants.

2° Un tube-tourbillon ne se meut pas avec le fluide, il n'est pas lié indéfiniment à la matière dont il est formé à une certaine époque.

Chacun sait en effet comment on produit la rotation électromagnétique des liquides dans des expériences classiques. Comme ce mode de génération du mouvement rotatoire n'a pas été jusqu'ici utilisé pour l'étude même des tourbillons, je n'en parlerai pas davantage.

Je ne parle pas non plus d'un corps doué de magnétisme permanent; la réalité physique semble appartenir non à la masse magnétique, mais au moment magnétique; l'existence du magnétisme permanent n'est possible que dans un corps dont les réactions élastiques pourraient donner sur un élément de volume un couple proportionnel au volume. Aucune des théories actuelles de l'élasticité ne s'applique à ces corps; les transformer ici m'entraînerait trop loin; d'ailleurs une aimantation permanente semble incompatible avec l'état fluide parfait.

Exceptions dues aux réactions élastiques. — Pour un fluide élastique quelconque, le terme $\int_A^B \frac{dp}{\rho}$ est remplacé par

$$(2)\quad \int_A^B \left[\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial s} + \left(\frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z}\right)\frac{\partial y}{\partial s} + \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial s}\right]\frac{\partial s}{\rho},$$

où l'on doit tenir compte des lois de compressibilité. Cette intégrale s'annule pour un contour fermé quelconque, lorsque la quantité intégrée est différentielle exacte; cela n'arrive que pour certaines lois de mouvement particulières à chaque nature de fluide élastique. Pour les fluides parfaits eux-mêmes, il faut que la pression soit une fonction de la densité seule, ce qui est loin d'être le cas général.

Il est assez difficile de se rendre compte sans calcul de la nécessité de ces diverses conditions. Dans un fluide parfait, les pressions produisent sur un élément de volume une poussée normale aux surfaces d'égale densité. Dans un corps ordinaire, les réactions élastiques N, T produisent aussi sur un élément de volume une résultante unique, mais dont la direction n'est pas liée aux surfaces d'égale densité. Là semble être toute la différence; pourtant, en y regardant de près, on reconnaît que, dans un fluide parfait, la résultante des pressions est toujours ap-

pliquée rigoureusement au centre de gravité du fluide contenu dans l'élément de volume tout comme la force extérieure, et l'inertie de la matière. Au contraire, dans un corps à forces tangentielles, la résultante des actions élastiques ne passe qu'approximativement par le centre de gravité de l'élément; pour l'y transporter, il faut ajouter un couple de l'ordre du produit de la résultante par le carré des dimensions linéaires de l'élément, et qui dépend des dérivées secondes des N et des T. Pour un cube ce couple ne s'annule que si trois relations entre ces dérivées secondes sont satisfaites : ce sont précisément celles qui expriment que l'intégrale (2) est indépendante du chemin parcouru. Quand il n'est pas nul ce couple est du cinquième ordre, c'est-à-dire de l'ordre du moment d'inertie de l'élément de volume : il peut donc imprimer à cet élément une accélération angulaire finie, et par suite altérer son mouvement de rotation autour du centre de gravité [1].

Ces considérations me paraissent indiquer dans quelle direction il convient de chercher la raison élémentaire de la remarquable propriété des fluides parfaits découverte par Helmholtz.

En résumé, le mouvement qui prend naissance à partir du repos dans un fluide sans frottement est doué d'un potentiel des vitesses, sous les conditions énoncées plus haut. Il en est de même pour un fluide naturel, au moins au début du mouvement; mais, si le mouvement se prolonge, le frottement interne, quelque faible qu'il soit, donne naissance à des vitesses de rotation qui croissent avec le temps. Celles-ci peuvent donc avoir une valeur finie dans le mouvement permanent d'un fluide, même assez dépourvu de viscosité pour qu'on puisse entièrement négliger les termes qui en dépendent dans les équations différentielles. C'est ce qu'on verra plus nettement au Chapitre II.

8. *Problèmes particuliers.* — L'analogie électromagnétique va nous permettre d'étudier facilement quelques cas importants du mouvement tourbillonnaire.

---

[1] Désignons par A, B, C, D, E, F les six composantes du moment d'inertie géométrique d'un petit volume quelconque, c'est-à-dire les intégrales de x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy. Appelons $\mathcal{D}_x$, $\mathcal{G}_x$, ξ les vitesses de dilatation linéaire, de glissement et de rotation, et Δ_x, Γ_x, Ξ des quantités formées au moyen des forces élastiques par unité de volume $\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z}$, $\ldots$, $\ldots$, comme $\mathcal{D}_x$, $\mathcal{G}_x$, ξ le sont en u, v, w. Le moment de la quantité de mouvement d'un petit volume autour de l'axe Ox est le produit de ρ par l'expression

$$(B + C)\xi - F\eta - E\zeta + D(\mathcal{D}_z - \mathcal{D}\ ) + (B - C)\mathcal{G}_x + F\mathcal{G}_y - E\mathcal{G}_z,$$

et le moment des forces élastiques a la même expression en fonction de Δ, Γ, Ξ. Cela est d'ailleurs évident si l'on se souvient que l'équilibre de translation d'un élément de volume assure l'équilibre complet d'un volume fini quelconque. Dans le cas particulier du cube ($A = B = C$; $D = E = F = 0$), les équations des moments donnent séparément les variations de la vitesse de rotation ξ, η, ζ d'Helmholtz. Les conditions $\Xi = H = Z = 0$, qui expriment que la circulation est constante, expriment aussi que la vitesse de rotation d'un élément de volume symétrique est invariable avec le temps.

1° *Mouvement plan.* — Un tube-tourbillon rectiligne, de section invariable, d'intensité I, produit autour de lui un mouvement circulaire; chaque cylindre de rayon r tourne avec une vitesse angulaire $\frac{I}{r^2}$; le filet reste immobile.

Un nombre quelconque de tubes parallèles se déforme et se déplace, de manière que le centre de gravité des intensités reste immobile (Helmholtz, 1858; *Abh.*, I, 125). Kirchhoff a montré l'existence d'autres intégrales du mouvement (*Vorles.*, 259). J'examinerai seulement ici le cas de deux tubes parallèles.

Deux tubes parallèles forment une figure invariable; chacun d'eux communique à l'autre une vitesse perpendiculaire au plan commun et égale à $\frac{I}{d}$, $\frac{I'}{d}$; ils tournent avec la vitesse angulaire $\frac{I+I'}{\pi d^2}$ autour du centre de gravité de leurs intensités en décrivant des cercles égaux ou inégaux suivant que les intensités sont égales ou différentes. Le centre de gravité immobile est entre les deux tubes s'ils sont de même signe; il est en dehors du côté du plus intense, s'ils sont de signes contraires. Deux tubes égaux et de signes contraires ont un mouvement de translation uniforme perpendiculaire à leur plan. Le mouvement qu'ils produisent dans le plan médian est tangent à ce plan, qu'on peut supposer solide. Un tube, situé à une distance d d'un plan fixe, se meut donc avec une vitesse $\frac{I}{2d}$ parallèlement à ce plan, comme s'il roulait en sens inverse de sa rotation. Un tourbillon compris entre deux parois planes qui font un angle $\frac{\pi}{n}$ décrit une spirale de Cotes $r \sin n\theta = a$. Un tourbillon voisin d'un cylindre circulaire tourne tout autour sans s'en écarter, comme on le voit facilement par la méthode des images.

Un assez grand nombre d'autres exemples de mouvements plans, dans le voisinage, de parois cylindriques, ont été traités par les géomètres anglais : Greenhill, Coates, Ferrers, Hill, Hicks, dans le *Quarterly Journal*, le *Messenger*, les *Proceedings of the royal Society of London*, et les *Proceedings of the Mathematical Society*.

Pour se rendre compte de la direction de la force électromagnétique en un point du courant lui-même, et par conséquent de la vitesse de translation d'un élément du tourbillon, il faut considérer la force électrodynamique que l'élément de courant subirait par les lois d'Ampère, et en déduire la force électromagnétique correspondante.

Mouvement dans l'espace. — Un tourbillon annulaire, plan et circulaire, se propage sans changement de diamètre dans l'espace indéfini. La vitesse constante, normale à son plan, dépend de son intensité, de son diamètre et des dimensions transversales du tube annulaire.

Deux anneaux circulaires égaux parallèles et de rotations inverses ne produisent pas de vitesse perpendiculaire au plan de symétrie; leur mouvement n'est pas

changé si ce plan est remplacé par une paroi rigide. A la vitesse de propagation propre de chaque anneau, il faut ajouter la vitesse due à l'autre. Celle-ci se compose d'une vitesse de translation généralement inférieure à la vitesse propre des anneaux et de sens contraire, et d'une vitesse d'accroissement ou de diminution du diamètre, suivant que les anneaux se rapprochent ou s'éloignent. Au total l'anneau grandit indéfiniment en se rapprochant du plan de symétrie; son mouvement de translation se ralentit si la rotation est inverse, il s'accélère et diminue progressivement de diamètre en s'éloignant du plan de symétrie. Comme ces deux mouvements correspondent à des rotations inverses, il ne saurait être question de réflexion de l'anneau contre le plan; il doit s'en approcher sans jamais l'atteindre.

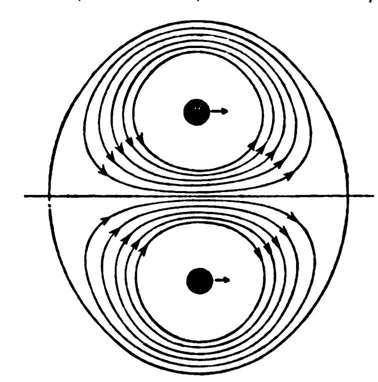
On peut analyser de même le mouvement de deux anneaux de même axe, mais inégaux en diamètre et en intensité. Considérons deux anneaux de même signe et peu différents. Pris isolément, ils auraient des vitesses de translation égales pour certaines valeurs de leurs diamètres. Mais les actions mutuelles accélèrent de plus en plus le mouvement de celui qui est en arrière, B, en le rétrécissant; au contraire, elles dilatent le premier, A, dont la vitesse diminue jusqu'à devenir égale, puis inférieure à celle de B, si bien que l'anneau B traverse l'anneau A et passe devant. Désormais les rôles sont renversés, l'anneau B se dilate et se ralentit, l'anneau A se rétrécit et s'accélère et le même jeu se reproduit indéfiniment entre les deux anneaux qui passent tour à tour l'un dans l'autre sans se quitter jamais (Helmholtz, 1858). J.-J. Thomson, qui a étudié à fond cette question (1883), a précisé les conditions de ce mouvement, et les relations qui existent entre ses éléments. Considérons deux tores circulaires, engendrés par la révolution de deux circonférences concentriques autour du même axe, et animés de la même vitesse de translation le long de cet axe. Chacun des anneaux décrit la surface de l'un des tores. Le cône variable qui les réunit passe toujours par la circonférence axiale commune. Les intensités des deux anneaux sont sensiblement en raison inverse du diamètre de la section méridienne du tore correspondant, pourvu que les volumes des tubes-tourbillons soient les mêmes.

Deux anneaux de même axe, mais de signes contraires, marchent l'un vers l'autre; le plus petit se ralentit, grandit et traverse l'autre qui s'est dilaté pour le laisser passer, en se ralentissant s'il n'est pas très grand, en s'accélérant au contraire s'il est beaucoup plus grand. Après cela, tous les effets changent de signe, et les anneaux se séparent en général. Il ne semble pourtant pas impossible que l'un des deux, plus intense et plus grand, entraîne l'autre dans son mouvement de translation, chacun oscillant autour d'une position moyenne.

9. Chaque tube-tourbillon est accompagné d'une certaine quantité de fluide dénué de rotation, qui lui forme une sorte d'atmosphère. Cette atmosphère peut d'ailleurs se séparer du tube-tourbillon quand il subit une variation d'énergie tem-

poraire ou permanente par une cause quelconque. Sir W. Thomson en a donné un exemple (1867) (*fig.* 1), dans le cas de deux tubes parallèles, égaux et de rotations inverses. La vitesse de translation des tourbillons est moindre que celle qu'ils produisent entre eux sur une certaine étendue du plan médian; il existe un cylindre, lieu des points où la vitesse du fluide a une composante perpendi-

Fig. 1. — (W. Thomson, *Proc. R. S. Ed.*, 1867.)



culaire au plan des deux tubes égale à leur vitesse de translation commune : c'est ce cylindre qui limite l'atmosphère ; il entoure les deux tubes. Les courbes tracées sur la figure sont des lignes de flux par rapport aux tourbillons. Les lignes extérieures, qui n'ont pas été tracées, sont grossièrement parallèles à l'axe de symétrie dont elles s'écartent pour contourner l'atmosphère des tourbillons mobiles. Les équations de ces lignes sont très faciles à déduire de l'analogie électromagnétique. Elles sont indépendantes de l'intensité.

Dans le cas des anneaux circulaires, l'atmosphère également indépendante de l'intensité a beaucoup moins d'étendue; elle est généralement contenue à l'intérieur d'un anneau qui enveloppe le tourbillon; son épaisseur dépend du rapport du volume du tube à son ouverture. C'est seulement quand cette ouverture est petite $\left(a < \frac{b}{8}\varepsilon^{4\pi^2+1}\right)$ que la surface limite coupe l'axe; d'abord concave au centre, puis convexe, elle s'allonge à mesure que l'anneau tourbillon se rétrécit.

10. *Vibrations des tourbillons.* — Dans tous les exemples précédents, le mouvement a un caractère permanent. Mais il importe d'aller plus loin et d'étudier les lois des vibrations des tourbillons, pour savoir quelles sont les formes stables. Les déformations de la ligne axiale du tourbillon d'intensité I peuvent quelquefois être étudiées sans hypothèse sur la distribution de l'intensité dans la section du tube et sur la forme de cette section; mais il n'en est jamais ainsi des variations de forme de la section. On s'est borné jusqu'à présent à l'étude des tourbillons liquides dont l'intensité est uniformément distribuée dans la section droite; cette unifor-

ment de distribution et conserve, quelles que soient les déformations du contour de la section droite, et l'on peut calculer par quadratures les vitesses internes et externes dues au tourbillon déformé.

La surface limite du tourbillon est constamment formée des mêmes parties fluides; si on la représente par $F(x, y, z, t) = 0$, à chaque instant on a

$$(1) \qquad \frac{dF}{dt} + u\frac{dF}{dx} + v\frac{dF}{dy} + w\frac{dF}{dz} = 0.$$

On choisit la forme de la fonction F en x, y, z seulement; les coefficients dépendent du temps. On en déduit les valeurs de u, v, w sur le contour en fonction des valeurs actuelles des coefficients, et on les porte dans l'équation (1). Celle-ci se décompose en autant d'équations différentielles du premier ordre qu'il en faut pour déterminer tous les coefficients en fonction du temps. Il ne reste plus qu'à intégrer, ce qui présente presque toujours des difficultés insurmontables. Toutefois il est ordinairement assez facile de décider si la forme type adoptée est stable pour toutes les petites déformations, car les équations sont alors linéaires.

Kirchhoff a étudié en détail (*Vorles.*, p. 265) le tube rectiligne à section elliptique. Soient ζ la vitesse angulaire élémentaire, et a, b les deux axes de l'ellipse contour.

1° Le contour de la section tourne sans se déformer autour de son centre avec une vitesse ω égale à [illegible].

2° Un point intérieur (x_0, y_0), situé sur une ellipse d'axes ka, kb, homothétique au contour, décrit avec la vitesse angulaire ω une circonférence de rayon [illegible] dont le centre est au point [illegible] par rapport aux axes de l'ellipse prise dans sa position initiale.

Les résultats de Kirchhoff se prêtent à un énoncé beaucoup plus clair à mon avis, [illegible] du mouvement dans tous les cas. Dans [illegible] avec la vitesse angulaire ω, traçons les [illegible] l'ellipse mobile reste constamment [illegible] conformément à la loi des [illegible] en [illegible]

[illegible] contour. Une [illegible] lesquelles [illegible] Si [illegible] vitesse angu- [illegible] les mêmes [illegible]

occupent des hélices de même pas, au lieu de génératrices, sur la surface du tube tourbillon (1880).

Des tubes circulaires égaux distribués aux sommets d'un polygone régulier un peu grand forment un système stable si le polygone n'a pas plus de six côtés; ils tournent avec une vitesse angulaire uniforme autour du centre immobile. Mais, si le polygone a seulement sept sommets, l'un des déplacements possibles croît indéfiniment, au lieu d'être périodique, et le système des sept tourbillons est instable (J.-J. Thomson, 1883). La vitesse de rotation commune ω_n est égale à $\frac{n-1}{2\pi r^2}\mathrm{I}$, s'il y a n tubes. Les périodes des déplacements sont résumées dans le Tableau suivant :

$$n = 3 \qquad \overbrace{\qquad 4 \qquad} \qquad \overbrace{\qquad\qquad 5 \qquad\qquad} \qquad \overbrace{\qquad\qquad 6 \qquad\qquad}$$

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega_3}; \quad \frac{3\pi}{\omega_4}\sqrt{2}, \quad \frac{2\pi}{\omega_4}; \quad \frac{8\pi}{\omega_5\sqrt{14+2\sqrt{5}}}, \quad \frac{4\pi}{\omega_5}, \quad \frac{8\pi}{\omega_5\sqrt{3}}; \quad \mathrm{T} = \frac{10\pi}{\omega_6\sqrt{32}}, \quad \frac{2\pi}{\omega_6}, \quad \frac{5\pi}{2\omega_6}, \quad \frac{10\pi}{3\omega_6}.$$

Quant aux déformations de la section de chaque tube, J. Thomson a examiné leur influence dans le cas de deux tubes. Elles produisent des variations périodiques de tous les éléments d'autant plus petites que le nombre de dentures de la déformation est plus grand. Par exemple, l'ellipse tourne autour de son centre avec sa vitesse de rotation propre et oscille lentement autour de la forme circulaire avec la période $\frac{\pi}{\omega_2}$; l'ellipticité maximum varie en raison inverse du carré de la distance des deux tubes.

Voyons maintenant l'anneau circulaire de rayon moyen a et qui a pour section méridienne un cercle de très petit rayon b. J.-J. Thomson a démontré (1883) que cette forme est stable. La vitesse de translation moyenne est

$$\frac{\mathrm{I}}{2\pi a}\left(\log\frac{8a}{b}-1\right);$$

Sir W. Thomson avait indiqué dès 1867 une valeur à peine différente. Si la circonférence moyenne est divisée en n segments égaux par la vibration, la période est sensiblement

$$\frac{2\pi a}{\sqrt{n^2(n^2-1)}}\,\frac{2\pi a}{\mathrm{I}\log\frac{8a}{b}},$$

tant que n est petit. Quand n est de l'ordre de $\frac{a}{b}$, la période devient

$$\frac{2\pi a}{\sqrt{n^2(n^2-1)}}\,\frac{2\pi a}{\mathrm{I}\left(\log\frac{2a}{nb}-1,08\right)}.$$

Si l'on met en évidence la longueur $\frac{2\pi a}{n}$ d'un segment vibrant, ces deux valeurs concordent d'une manière satisfaisante avec celles que Sir W. Thomson (1880) avait trouvées pour un tourbillon rectiligne dont l'axe est simplement fléchi.

Il est facile de se rendre compte que toute courbe plane autre que le cercle se déforme nécessairement en progressant; car les forces électromagnétiques perpendiculaires au plan de la courbe ne sont pas partout égales; la vitesse de translation des diverses parties de l'anneau n'est pas la même; il cesse d'être plan. En même temps les forces électromagnétiques cessent d'être parallèles à leur résultante; la projection de l'anneau sur son plan primitif change de forme et, tout en progressant avec une vitesse moyenne constante, il oscille autour de la forme circulaire, se courbe et se tord.

11. *Choc de deux anneaux.* — J.-J. Thomson a étudié l'influence mutuelle de deux anneaux circulaires qui passent assez loin l'un de l'autre pour qu'on puisse se contenter d'une première approximation. Voici les résultats principaux qu'il a obtenus (1883):

La direction et la vitesse du mouvement, le diamètre des anneaux subissent un changement permanent; en outre, chacun d'eux est mis en vibration; quand ils se sont écartés l'un de l'autre, la période est celle qui correspond aux dimensions finales de l'anneau. Les directions de référence sont :

1° La plus courte distance D_1 entre les lignes presque droites parcourues par les centres des deux anneaux A et B ;

2° Le plan N perpendiculaire à cette plus courte distance en son milieu ;

3° Les directions mêmes des mouvements de chaque anneau AA', BB' sensiblement parallèles au plan N.

Les deux anneaux n'arrivent pas simultanément aux extrémités de la droite D_1 ; j'appellerai A celui qui y passe le premier. La plus courte distance entre les deux anneaux est une droite D_2 différente de D_1 et plus longue.

Soient I, R, U, I', R', U' l'intensité, le rayon et la vitesse de translation des deux anneaux A, B et ε l'angle des chemins AA', BB'. La vitesse relative des deux anneaux est

$$V = \sqrt{U^2 + U'^2 - 2UU'\cos\varepsilon}.$$

L'accroissement du rayon R après le choc est

$$\delta R = + I'R'U' \frac{RR'UU'\sin^3\varepsilon}{V^4 D_2^5}\left(1 - 4\frac{D_1^2}{D_2^2}\right)\sqrt{1 - \frac{D_1^2}{D_2^2}}.$$

L'angle du chemin de A avec N, compté positivement quand A s'éloigne du plan, est

$$\varphi = -2I'R'^2 \frac{UU'\sin^2\varepsilon}{V^3 D_2^5} D_1\left(1 - \frac{4}{3}\frac{D_1^2}{D_2^2}\right).$$

L'angle du chemin dévié de A avec le chemin initial, mesuré parallèlement au plan N et pris positivement vers BB', est

$$\psi = +2 I' R'^2 \frac{UU' \sin^2\varepsilon (U - U'\cos\varepsilon)}{V^4 D_2^3} \left(1 - 4\frac{D_1^2}{D_2^2}\right) \sqrt{1 - \frac{D_1^2}{D_2^2}}.$$

Quant aux signes, le Tableau suivant les résume :

$D_2 > \frac{2 D_1}{\sqrt{3}}$, A et B s'écartent du plan N $\varphi > 0$, $\varphi' > 0$,

$D_2 < \frac{2 D_1}{\sqrt{3}}$, A et B se rapprochent du plan N $\varphi < 0$, $\varphi' < 0$.

$D_2 > 2 D_1$	$D_2 < 2 D_1$.
Le rayon et l'énergie de A croissent. Sa vitesse de translation diminue. $\delta R > 0$. Pour B c'est le contraire. $U > U'\cos\varepsilon$ A se rapproche de BB' $\psi > 0$, $U < U'\cos\varepsilon$ A s'éloigne de BB' $\psi < 0$, $U' > U \cos\varepsilon$ B s'éloigne de AA' $\psi' < 0$, $U' < U \cos\varepsilon$ B se rapproche de AA' $\psi' > 0$.	Tous les effets sont renversés.

Sir W. Thomson a montré par un raisonnement très général (*Vortex Mot.*, § 35, 1868) qu'un tourbillon qui passe près d'un solide fixe est toujours dévié comme par une attraction lorsqu'il se meut librement (Ch. II). J.-J. Thomson a retrouvé ce résultat pour le passage d'un anneau circulaire près d'une sphère. L'anneau se ralentit et s'élargit à mesure qu'il approche de l'obstacle; des mouvements contraires se produisent quand il s'éloigne. Ni les dimensions ni la grandeur de la vitesse finale ne sont altérées par le passage auprès d'un obstacle fixe. La direction du mouvement a changé d'un angle $-\frac{45}{128}\frac{\pi I R^2 a^3}{U D^6}$ en appelant a le rayon de la sphère, et D la plus courte distance du centre de la sphère au centre de l'anneau dont la vitesse est U.

12. *Anneaux noués.* — Ces anneaux peuvent être formés d'un ou plusieurs tourbillons distincts. M. Tait s'est particulièrement occupé de la question du nombre des nœuds qui peut présenter un intérêt géométrique analogue à celle de l'ordre de multiplicité d'un espace. Voici un exemple simple d'anneaux de ce genre. Traçons, sur un tube flexible, $\frac{m}{p}$ pas d'une hélice à pn filets; courbons le tube et réunissons les extrémités des files en regard : l'anneau est formé de n courbes fermées distinctes, mais enchevêtrées. L'ordre de multiplicité de l'espace extérieur est $n+1$, puisqu'il n'y a que n intensités distinctes; mais le nombre des nœuds est beaucoup plus grand. Quand les anneaux ont tous la même intensité, ils sont enroulés sur la surface d'un même tore; s'ils sont d'intensités différentes, les tores qui correspondent à chaque anneau ont des sections méridiennes différentes, mais même circonférence axiale.

J.-J. Thomson a traité le cas de $n = 1$, $p = 1$ (1881): les deux courbes font m tours l'une autour de l'autre; elles sont enroulées sur deux tores dont les sections méridiennes concentriques ont des rayons inversement proportionnels aux intensités; les rayons menés du centre commun aux deux courbes sont en ligne droite. Ces conditions ne suffisent pas pour la stabilité, il faut y ajouter l'égalité des vitesses de translation moyennes. Soient d la distance des deux filets (somme des rayons des tores); b, b' les rayons des sections droites de chacun d'eux; I, I' leurs intensités; ϖ, ϖ' leurs volumes

$$d^{I-I'} = b^{I} b'^{-I'} \quad \text{ou} \quad (2\pi a d^2)^{I-I'} = \varpi^{I} \varpi'^{-I'}.$$

Ainsi, la distance d est une fonction de l'ouverture moyenne a et des constantes de chaque anneau. Si les deux anneaux sont différents, il y a deux périodes de vibration d'ensemble (déplacements simultanés des traces des filets dans toutes les sections méridiennes), l'une rapide

$$\frac{4\pi^2 a^2}{\mathrm{I} m \sqrt{m^2-1}\left(\log \frac{64 a^2}{bd} - \frac{7}{4}\right)},$$

l'autre lente

$$\frac{2\pi}{\frac{\mathrm{I}-\mathrm{I}'}{\pi d^2} - \frac{\mathrm{II}'}{\mathrm{I}+\mathrm{I}'}\,\frac{2m^2-1}{4\pi a^2}\log\frac{d^2}{bb'}},$$

qui dépendent du nombre m de tours de l'hélice. Ces périodes diffèrent peu, l'une de la période d'oscillation d'un anneau circulaire simple pour une déformation de rang m, l'autre de la durée de rotation de l'un des tubes autour de l'autre.

Dans le cas particulier où les deux anneaux ont même intensité, on en déduit $b = b'$, mais d reste indéterminé. La forme d'équilibre de chaque anneau n'est pas l'hélice simple tracée sur le tore : il s'y superpose une hélice de pas moitié moindre, comme le montrent les équations en coordonnées cylindriques

$$\rho = a \pm \frac{d}{2}\cos(\mu t - m\psi) + \frac{d^2}{32a}\cos 2(\mu t + m\psi),$$
$$z = \quad \pm \frac{d}{2}\sin(\mu t - m\psi) + \frac{d^2}{16a}\sin 2(\mu t + m\psi),$$

rapportées au plan moyen. Les signes supérieurs se rapportent à l'un des anneaux, les signes inférieurs à l'autre; μ correspond à la période de vibration lente.

A l'exception de ce dernier résultat, poussé au second ordre, tous les calculs de J.-J. Thomson (1883) sont des approximations du premier ordre par rapport à $\frac{a}{d}$, $\frac{d}{b}$, pour des anneaux dont l'axe est sensiblement circulaire. La section droite

est aussi sensiblement circulaire et la vitesse de rotation y est uniformément répartie. Enfin il ne s'agit que des fluides incompressibles.

Production expérimentale des tourbillons.

13. Tout le monde a pu observer ces anneaux persistants lancés par les fumeurs dans un air calme, ou ceux que produit la combustion spontanée du phosphure d'hydrogène. On les voit flotter lentement dans l'atmosphère, se déformer au gré du moindre souffle, s'allonger, puis se rompre et persister longtemps encore, en se dissipant peu à peu par les extrémités disjointes. Souvent aussi, l'anneau ne se forme même pas, et la fumée s'échappe dès le début en longue traînée semblable à un *fil de la Vierge*. Ces anneaux sont des anneaux tourbillons; ils persistent, sans se rompre, tant qu'ils se meuvent dans l'air calme où les vitesses varient d'une manière continue. Atteignent-ils une surface de discontinuité ou plutôt, à cause du frottement de l'air, une région de remous et de variations rapides de la vitesse dus à la rencontre de courants d'air opposés, les anneaux se rompent et leurs extrémités s'écartent. La rotation n'a pas pour cela disparu ; mais la partie du tube située dans la couche de discontinuité est devenue si mince que la fumée n'y est plus visible (n° 6).

A l'époque où Helmholtz fondait la théorie et avant de la connaître, en 1858 et 1860, Rogers en Amérique, Reusch en Allemagne ont indiqué le moyen de produire à coup sûr des anneaux fermés persistants dans les gaz et dans les liquides; ils ont étudié leurs actions mutuelles.

Pour lancer une masse de gaz animée d'un mouvement de rotation, on profite du frottement superficiel et interne; pour la rendre visible, on la charge de fumée. Tait et Thomson ont vulgarisé un appareil formé d'une grande boîte cubique en bois dont une face a été remplacée par de la toile peu tendue; la face opposée, percée d'une ouverture, porte extérieurement deux coulisses parallèles qui permettent d'introduire des cartons ou des planches percées d'ouvertures plus petites et de formes variées. On remplit la boîte de fumée, soit en y faisant brûler divers corps, soit en y mettant deux assiettes remplies d'acide chlorhydrique et d'ammoniaque. Un coup sec frappé sur la toile fait sortir un petit volume d'air chargé de fumée; le frottement latéral rend la vitesse de translation très faible au bord, grande au centre, et produit un mouvement de rotation autour d'axes parallèles au bord, qui s'étend d'autant plus loin que celui-ci est plus épais. Pour des ouvertures de 20 à 25 centimètres de longueur, un carton de 5 ou 6 millimètres convient très bien. Tout près de la boîte, on ne distingue d'abord qu'une masse confuse de fumée; mais, à quelques décimètres, la fumée de la partie centrale est restée en arrière, et l'anneau progresse seul avec une vitesse à peu près uniforme.

Dans une salle de cours dont le fond est occupé par un grand tableau noir, on ferme les rideaux des premières fenêtres latérales et on laisse passer seulement un faisceau solaire renvoyé par l'héliostat parallèlement au tableau. On place la boîte en face de l'héliostat, de manière que l'anneau projeté se meuve le long du faisceau de lumière : il reçoit une vive illumination qui le détache nettement sur le fond sombre, aux yeux de tout un auditoire.

14. Le mode de production de l'anneau montre suffisamment qu'il est animé d'un mouvement de rotation, et, comme il parcourt dans un air calme 8 ou 10 mètres sans se briser, il est facile de reconnaître qu'il obéit à toutes les lois que la théorie a indiquées.

1° La vitesse de l'air qui traverse intérieurement l'anneau est moindre que celle de l'anneau lui-même. On s'en assure au moyen de légers drapeaux, de flammes ou simplement de la main, placés sur le trajet de l'anneau. Sur les bords, au moment du passage de l'anneau, un violent remous se produit, avec renversement du sens du vent, qui s'écarte d'abord de l'axe du mouvement et converge ensuite vers cet axe. Ainsi, au centre du tourbillon, l'air dénué de rotation se renouvelle constamment; le tourbillon va sans cesse à la rencontre de nouvelles couches, s'y fraye un chemin, puis les laisse s'écouler en arrière. C'est grâce à cette propriété qu'un court trajet suffit à séparer le tourbillon proprement dit du jet d'air central chargé de fumée, mais dénué de rotation.

2° On peut contrôler l'expérience par l'expérience inverse (Ball, Yeates, 1868). On produit la fumée non plus dans la boîte, mais au dehors, à 1 mètre en avant, en faisant bouillir dans deux capsules voisines des solutions concentrées d'acide chlorhydrique et d'ammoniaque. L'anneau sort invisible, traverse la fumée, reparaît entouré d'un nuage confus; 1 ou 2 mètres plus loin, la fumée centrale s'est dissipée, il ne reste plus qu'un large tore. En regardant par la tranche, on voit nettement que toute cette fumée environne, sans le pénétrer, un tore de même ouverture dont le cercle méridien apparaît, au milieu de la fumée, comme un double trou sombre de 5 ou 6 centimètres de diamètre. C'est l'anneau tourbillon proprement dit qui se propage en se conservant intact à travers tous les milieux; il s'en entoure et les entraîne un moment, laisse en arrière presque tout ce qui est dépourvu de rotation et, après quelques mètres de parcours, ne conserve plus qu'une mince enveloppe superficielle qui le dessine et qui a pénétré dans son atmosphère (n° 9).

3° *Ouverture circulaire.* — Quand on projette l'anneau normalement contre un mur noir, on le voit s'approcher beaucoup du mur sans grandir notablement. Arrivé à moins d'un décimètre, il s'élargit subitement et s'évanouit avec une rapidité saisissante, dès que son diamètre dépasse 1 mètre ou 1 mètre et demi. Si l'incidence est oblique, l'anneau s'aplatit sur le mur en se courbant et finit

toujours très vite par se détruire. L'intensité et la quantité de matière restant les mêmes, la vitesse de rotation est d'autant plus grande et la section d'autant plus petite que la longueur est plus grande ; l'action destructive du frottement interne est d'autant plus énergique et plus rapide.

Tout obstacle placé sur le trajet de l'anneau produit un effet analogue. Pourtant, si l'obstacle est en dehors du chemin de l'anneau, celui-ci cesse de se mouvoir en ligne droite. Le côté le plus voisin de l'obstacle est ralenti, et le plan général de l'anneau tourne. En même temps il se déforme et se met à vibrer. Une fois l'obstacle dépassé, l'anneau reprend ses dimensions et sa vitesse moyenne, mais sa route a été déviée vers l'obstacle. C'est tout le contraire de ce qu'on a l'habitude d'appeler une réflexion (Sir W. Thomson, Tait, 1869).

4° En frappant à une seconde d'intervalle deux coups secs sur la toile, le second un peu plus fort, on peut avec un peu d'adresse faire sortir deux anneaux bien formés de même rotation. Le second rejoint le premier, le traverse en se rétrécissant et s'accélérant, tandis que l'autre se ralentit et s'ouvre comme pour rendre le passage plus facile. Quelquefois, quand la différence des vitesses n'est pas trop grande, le même mouvement se reproduit avec interversion des rôles.

5° Avec deux boîtes on peut facilement étudier dans leurs détails les actions mutuelles de deux anneaux quelconques ; pour faire cette étude dans les meilleures conditions de précision, il faudrait lancer les tourbillons dans une grande salle close, comme une serre, et les regarder du dehors à travers une glace.

6° M. Ball (1871-1875) a étudié la loi du mouvement de translation d'un anneau circulaire de 25 centimètres de diamètre environ dans un long corridor. Le tourbillon est lancé avec une vitesse initiale de 3 mètres par le choc d'un pendule qui tombe toujours de la même hauteur sur la toile d'une grande boîte de 70 centimètres de côté. Le commencement de la chute du pendule ouvre un circuit électrique, que referme plus tard le choc de l'anneau contre une large feuille de papier tendue sur un léger cadre de bois que l'on peut suspendre à diverses distances sur le trajet du tourbillon. L'ouverture et la fermeture du courant sont enregistrées par un appareil tournant qui mesure le temps écoulé. La membrane est disposée dans des expériences successives à des distances croissant par 2 pieds jusqu'à 7 mètres ; pour chaque position, on fait dix mesures dont on prend la moyenne.

Au départ et jusqu'à une distance de 1 mètre et demi environ, le mouvement est accéléré et médiocrement déterminé ; au delà il commence à être nettement retardé, mais l'étendue des expériences n'est pas assez grande pour déterminer la loi du retard. C'est ainsi que, d'après M. Ball, des résistances proportionnelles à la vitesse ou au carré de la vitesse satisfont également bien aux expériences (¹).

(¹) Accélérations négatives : $0{,}345\,v$, ou v^2 lognép $1{,}05212$.

L'une des deux lois conduirait à un arrêt de l'anneau à une distance d'environ 10 mètres, l'autre à une progression indéfinie de plus en plus lente. Dans ces conditions, je laisserai indécise la question de savoir si le ralentissement est dû au frottement de l'air, comme semble l'admettre M. Ball, ou simplement à l'action des parois du corridor dans l'expérience citée, et du mur de fond de la chambre dans une seconde expérience, actions retardatrices dans un fluide parfait, ou enfin à la compressibilité de l'air.

7° *Oscillations.* — Avec une ouverture allongée, dont la longueur ne dépasse pas deux ou trois fois la largeur, l'anneau se produit encore très bien. Les courbures inverses qu'il prend alternativement sont très faciles à observer en le regardant par la tranche; de face l'ellipse paraît se déformer avec la même période; elle devient un cercle, puis une ellipse orientée à angle droit avec la première, etc.

Des ouvertures quadrangulaires, hexagonales, donnent des résultats analogues, mais il faut les découper dans des cartons d'autant plus minces que le nombre de subdivisions du contour est plus grand, pour la même surface ouverte. Il convient de diminuer en même temps la quantité d'air chassée de la boîte.

En outre, dans l'air, les anneaux tendent rapidement vers la forme circulaire qui seule est stable. La cause principale d'un aussi rapide amortissement n'est probablement pas le frottement interne de l'air, mais sa compressibilité. Le temps qu'exige la propagation d'une modification quelconque produit une différence de phase entre des actions qui seraient simultanées dans un liquide; il faut ajouter, dans les équations d'un mouvement périodique, un terme proportionnel à la vitesse, dont le coefficient dépend de la période du mouvement et diffère essentiellement par là d'un coefficient de frottement spécifique tout en produisant des effets analogues et souvent très intenses.

Toutes ces expériences sont faciles à répéter sur une échelle beaucoup plus restreinte au moyen d'appareils simples, dont plusieurs ont été décrits par M. Guebhardt dans la *Nature* (1881).

15. *Tourbillons dans les liquides.* — Toutes les fois qu'une petite quantité de liquide est lancée un peu vivement dans une grande masse immobile, elle y forme un tourbillon annulaire ou une goutte. Ce dernier cas se produit lorsque la tension superficielle est suffisante; la surface de la goutte est alors une surface de discontinuité non seulement pour les vitesses, mais encore pour les pressions; le mouvement intérieur est certainement tourbillonnaire, mais rien ne le rend sensible aux yeux. D'après J.-J. Thomson (1885), qui a expérimenté sur un grand nombre de liquides, l'anneau ne se produit que si les deux liquides peuvent se diffuser l'un dans l'autre, ce qui confirme une vue théorique de Trowbridge (1877). L'alcool absolu dans la benzine donne des anneaux; additionné d'un millième d'eau, il ne forme plus que des gouttes.

Ces anneaux ont été étudiés d'abord par Rogers (1858) et Reusch (1860). En 1864, Tomlinson a décrit sous le nom de *nouvelles figures de cohésion* et dessiné les formes très variées des anneaux de divers liquides suivant leur nature et leur diffusibilité. Il se proposait de se servir de ces formes caractéristiques pour discerner le degré de pureté de certaines essences employées en pharmacie.

Une condition indispensable de régularité des anneaux est le repos absolu du liquide dans lequel on les forme, ce qui exige une parfaite uniformité de la température. On obtient ce résultat en mettant plusieurs heures d'avance le liquide dans un vase de grandes dimensions posé sur un support bien stable, à l'abri du rayonnement direct du soleil et des poêles. Il est avantageux de choisir un vase de verre à parois parallèles planes : un petit aquarium, le vase ordinairement fourni pour les expériences de Plateau. On éclaire par transparence.

Deux méthodes principales sont employées :

1° Chute d'une goutte toute formée ;

2° Expulsion d'une petite quantité de liquide par l'extrémité d'un tube immergé.

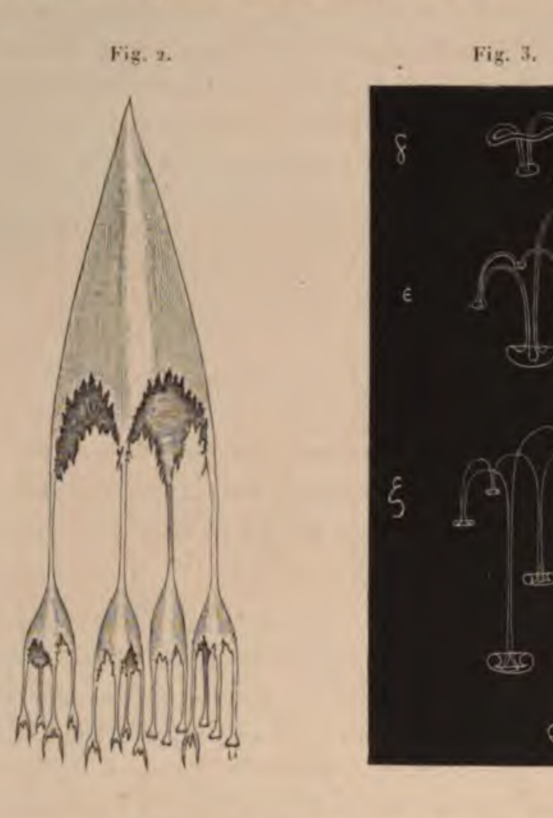
Très peu d'expériences ont été faites avec une ouverture en paroi plane peu épaisse, qui fournit des anneaux si bien formés dans les gaz. On obtient des résultats plus compliqués et un peu différents par les deux méthodes ; je les passerai en revue séparément.

16. *Chute d'une goutte de liquide.* — Un très bon procédé consiste à mettre le liquide dans une burette graduée dont on ouvre à peine le robinet ; les gouttes se succèdent très régulièrement à plusieurs secondes d'intervalle sans se nuire. Pour des gouttes de 4 ou 5 millimètres de diamètre, une hauteur de chute de 2 ou 3 centimètres est ordinairement convenable. Lorsque les liquides ont des indices très différents, ou une coloration propre, il n'y a besoin d'aucun artifice pour discerner l'anneau ; mais, pour des liquides peu différents ou identiques, il faut en général ajouter à celui qui tombe en gouttes une petite quantité de couleur d'aniline intense, qui n'altère pas sensiblement sa densité. On peut imiter aussi l'expérience du rideau de fumée, en faisant flotter sur la surface libre du liquide récepteur une fine poussière, ou une couche mince d'un liquide non miscible, comme l'huile sur l'eau (Trowbridge, 1877). L'anneau incolore s'entoure en descendant d'une enveloppe de poussière, qui le sépare du reste du liquide, et prend part au mouvement tourbillonnaire.

On obtient ainsi de très beaux anneaux bien formés, ayant 1 ou 2 centimètres d'ouverture et quelques millimètres de section droite. Ils sont persistants et leur section droite reste longtemps très étroite. A mesure qu'ils progressent, les petites inégalités s'accusent, la section se renfle en quelques points isolés, il s'y forme une sorte de nouvelle goutte, qui descend plus vite,

suivie d'une légère traînée de matière, et par le même phénomène de frottement superficiel donne, elle aussi, naissance à un nouvel anneau tourbillonnant. Certains liquides projettent fréquemment deux ou trois couronnes d'anneaux décroissants, et dessinent un véritable lustre flottant. Suivant la diffusibilité et la tension super-

Fig. 2. Fig. 3.



ficielle, ces anneaux sont rattachés les uns aux autres par de simples fils ou par des surfaces complètes formant dôme en ogive (*fig.* 2) : Fousel oil in paraffin oil, Tomlinson, 1864; (*fig.* 3 : J.-J. Thomson, 1885).

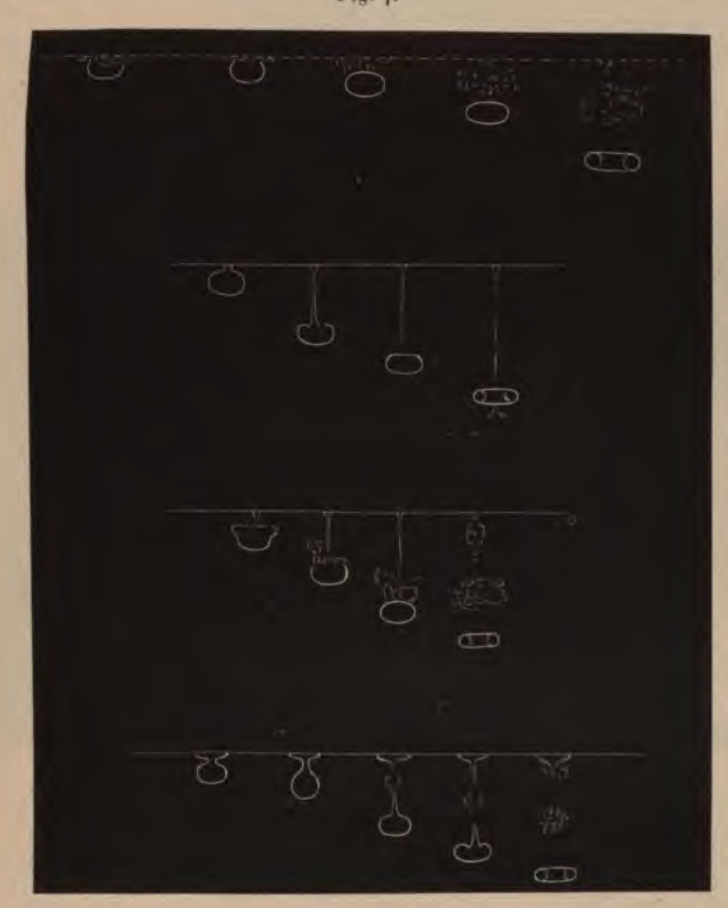
Quand l'anneau est bien formé et simple, on peut reproduire facilement toutes les expériences décrites sur les gaz.

En 1875, M. O. Reynolds a fait remarquer que tous ces phénomènes se produisent plus ou moins irrégulièrement quand la pluie tombe à la surface de la mer; quand on lance à travers une pomme d'arrosoir de l'eau colorée dans un baquet, chaque anneau se forme, se meut et ne se détruit qu'à une profondeur de quelques centimètres. Chaque goutte transforme en chaleur, non seulement son énergie cinétique, mais une partie de l'énergie de translation de la mer, avant de s'y mélanger; c'est ainsi que, d'après M. O. Reynolds, une pluie fine et persistante peut calmer les agitations les plus violentes. Peut-être faudrait-il rapporter à une

cause analogue l'influence connue de l'huile; continuellement mêlée à l'eau de la surface, elle formerait une émulsion en fines gouttelettes; la production, puis la diffusion, par le frottement, de leur mouvement tourbillonnaire interne serait le mécanisme de la transformation de l'énergie cinétique de la mer en chaleur.

17. Les conditions de production du mouvement tourbillonnaire par simple frottement interne dans la masse du liquide, hétérogène ou non, ont fait l'objet d'expériences importantes de J.-J. Thomson et Newall (1885).

Fig. 4.

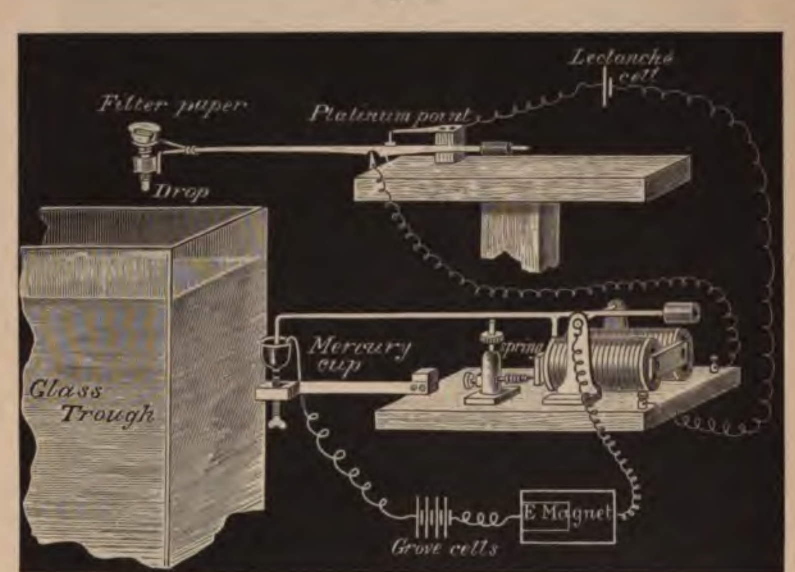


La perfection des anneaux formés pour une même hauteur de chute, c'est-à-dire une même vitesse initiale, varie beaucoup avec la nature des liquides. Certains ne donnent qu'un trouble confus, d'autres des anneaux plus ou moins bien formés, d'autres enfin des gouttes qui restent à la surface. L'ordre est indépendant du liquide récepteur; il est le même que celui des viscosités internes $\frac{\mu}{\rho}$ (n° 5) crois-

santes : éther, eau, acide sulfurique concentré. Le frottement est-il faible, la rotation reste confinée à une couche superficielle, la diffusion se produit immédiatement; plus intense, le frottement met en rotation une grande partie de la goutte sans atteindre le centre, l'anneau se forme nettement; plus intense encore, il fait de toute la bulle un tourbillon unique dont le centre même ne se diffuse pas. Cette explication est contrôlée par le fait que le même liquide présente la succession des formes décrites, quand on l'emploie en gouttes de plus en plus fines. Le mouvement de rotation pénètre à une profondeur à peu près invariable pour la même hauteur de chute et entraîne par conséquent une fraction d'autant plus grande de la goutte que celle-ci est plus petite.

MM. J.-J. Thomson et Newall ont aussi étudié la période de formation de l'anneau (*fig.* 4) (¹). Le liquide est contenu dans un petit entonnoir soutenu au bout

Fig. 5.



d'un léger levier équilibré. La chute de la goutte provoque, par un dispositif que la figure explique suffisamment, une forte étincelle d'induction dont on peut à volonté régler le retard. L'anneau éclairé instantanément paraît alors dans sa forme actuelle complète sans confusion possible de formes successives.

La plupart des expériences ont été faites avec une dissolution étendue de nitrate d'argent tombant dans de l'eau un peu salée; la goutte se distingue très facilement grâce au chlorure d'argent formé; une trace d'ammoniaque suffit à rendre

(¹) Nous adressons nos remercîments à la Rédaction des *Proc. R. S.*, qui a bien voulu nous prêter les *fig.* 3, 4, 5, 6 et 7.



au liquide récepteur toute sa limpidité après plusieurs gouttes. Les *fig.* 3, 4, 6, 7 montrent très exactement les principales apparences observées. Quand la tension superficielle n'est pas nulle, l'anneau ne se forme pas; mais les déformations de la goutte (*fig.* 6 et 7) ne sont pas moins caractéristiques d'un mouvement tourbillonnaire interne.

Enfin la persistance de l'anneau dépend de la forme de la goutte au moment où

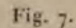
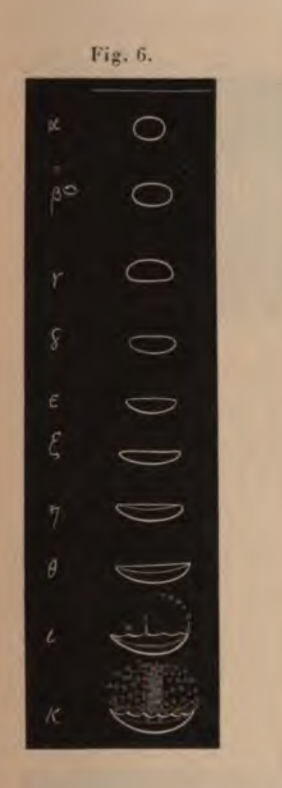


Fig. 7.

Fig. 6.





elle rencontre la surface; car la longueur du chemin que l'anneau parcourt sans se déformer est une fonction périodique du temps que met la goutte à atteindre la surface. J. Thomson a constaté que cette période est bien de même ordre de grandeur que la période oscillatoire de la goutte en vertu de sa tension superficielle dans l'air.

18. *Écoulement par un tube cylindrique immergé.* — Un tube de verre, de 1 centimètre de diamètre au moins, à bords nettement coupés et courbé en S, s'ouvre horizontalement ou verticalement vers le haut, à l'intérieur du liquide récep-

teur. Il est relié par un caoutchouc court à un large flacon. Un robinet qu'on ouvre pendant un temps très court ne laisse échapper qu'une très petite quantité de liquide sous une pression de 2 ou 3 centimètres d'eau. Les anneaux se produisent très régulièrement, mais leur forme est beaucoup moins simple que celle des anneaux gazeux que nous avons décrits. Ce n'est plus un simple tore dont la section droite à peu près circulaire ne se déforme guère : c'est toujours un anneau, mais comme ceux qu'on pourrait obtenir avec un tube de caoutchouc long et très mince, roulé entre les doigts. La section droite ressemble beaucoup à une

Fig. 8.



spirale tracée à la pointe du pinceau; cette ligne s'allonge et s'enroule de plus en plus à mesure que l'anneau progresse et s'élargit. Ce fait est complètement d'accord avec l'action qu'exercent l'un sur l'autre deux anneaux de même rotation.

Cette forme particulière se rattache évidemment à l'emploi du tube cylindrique auquel le liquide adhère fortement; l'écoulement se fait principalement par le milieu du tube, le liquide s'y élève en forme de dôme renflé, puis la partie supérieure s'aplatit, s'étale sous la résistance de l'eau, se borde d'un tore qui va s'élargissant (*fig.* 8); la goutte se détache, monte lentement en s'enroulant par le bord. Quand le liquide récepteur est en repos parfait, la spirale est assez res-

Fig. 9.



serrée au bout de 1 décimètre de course pour paraître une surface continue. L'anneau monte, s'élargit beaucoup en approchant de la surface libre. Tantôt il s'y dissipe, tantôt il s'y réfléchit et redescend en continuant à s'élargir lente-

ment. C'est probablement quand toute rotation s'est éteinte par le frottement interne considérable que se produit cette réflexion apparente.

Dans un liquide en repos complet, deux gouttes qui se suivent prennent des formes très différentes (*fig.* 9); la première s'est enroulée en spirale, la seconde s'allonge en un tube mince, l'extrémité supérieure se rétrécit, se précipite à l'intérieur de l'anneau, l'ouvre, le traverse pour s'enrouler à son tour en spirale assez serrée. Quant au premier anneau, sa spirale ne tarde pas à devenir dissymétrique, et souvent on le voit s'allonger à son tour à l'intérieur de son devancier. Le spectacle est plus curieux encore quand les anneaux se rencontrent un peu obliquement; les déformations et les enroulements se propagent alors le long de chaque anneau, au lieu de se produire simultanément. La plupart de ces phénomènes ont été très bien décrits par M. Oberbeck (1877).

Dès 1858, Helmholtz a fait remarquer qu'il se produit des anneaux-tourbillons demi-circulaires ayant leur axe dans la surface libre, lorsqu'on déplace brusquement une pelle, ou une rame peu enfoncée dans l'eau, une cuiller dans une tasse de thé. Ces demi-anneaux, dont on voit la section par la surface libre, se propagent comme les anneaux complets dans un liquide indéfini.

Dans aucun cas à ma connaissance, on n'a produit ni même observé des anneaux noués. Je ne vois pas bien comment on pourrait en produire à coup sûr.

Atomes-tourbillons.

19. Les propriétés des anneaux-tourbillons dans un liquide infini animé de vitesses continues, qui n'est soumis à aucune force extérieure, ont conduit Sir W. Thomson à l'hypothèse célèbre des atomes-tourbillons (1867). Quelle condition la notion expérimentale de l'équivalence et la loi des proportions simples imposent-elles presque invinciblement à toute hypothèse mécanique sur la constitution de la matière? L'existence d'unités de matière très petites, différentes suivant la nature chimique du corps simple, mais identiques pour un même corps, et indestructibles par tous les moyens physiques : les atomes. Les anneaux-tourbillons n'ont-ils pas toutes ces propriétés? C'est dans un milieu indéfini qu'ils sont formés, et ce milieu unique peut donner naissance à des atomes différents par la masse, par l'intensité, par le nombre des nœuds. Indestructibles, ils sont néanmoins élastiques; isolés, ils parcourraient une ligne droite; mais, quand deux anneaux passent à quelque distance l'un de l'autre, leurs routes s'infléchissent, et ils échangent une partie de leur énergie. Ces actions mutuelles fournissent les éléments d'une théorie cinétique des gaz, quand les atomes sont très écartés les uns des autres; elles se compliquent quand les distances restent petites et peuvent très bien alors rendre compte de l'état liquide ou solide. Les dimensions de l'anneau ne sont pas inva-

riables : elles croissent quand on lui communique de l'énergie ; il en est de même des vitesses qu'il produit autour de lui. Ne peut-on trouver là l'explication de la dilatation par la chaleur? Chaque anneau peut effectuer une infinité de vibrations de deux types distincts, déformation de la section droite, flexions du tube-tourbillon ; les périodes en nombre infini sont liées aux qualités indestructibles de l'anneau et à ses dimensions actuelles : elles dépendent de la nature chimique de l'anneau et de son état, comme l'exige l'analyse spectrale. Éloignés les uns des autres, dans l'état gazeux, les anneaux ont des dimensions presque identiques; ils vibrent librement pendant la plus grande partie de leur course : les périodes vibratoires sont donc des valeurs déterminées par les dimensions moyennes des anneaux, elles ne forment pas une série continue; au contraire, les vibrations les plus lentes sont entièrement distinctes ; quant aux vibrations d'ordre élevé, leurs périodes sont très peu différentes et peuvent former une suite continue si les anneaux ne sont pas tous rigoureusement égaux. Si les anneaux sont plus rapprochés, les dimensions sont plus inégales, les périodes vibratoires moins distinctes, aux spectres de raies auront succédé les spectres de bandes. Enfin, dans les solides, l'entassement irrégulier des anneaux produira une répartition plus uniforme de toutes les dimensions autour de la moyenne, toutes les périodes vibratoires seront représentées, avec un ou plusieurs maxima correspondant aux périodes de la dimension moyenne. Le spectre sera continu, mais la répartition de l'éclat, non uniforme, variera avec les dimensions moyennes, c'est-à-dire avec la température.

Deux ou plusieurs anneaux qui se rapprochent suffisamment peuvent se lier l'un à l'autre et se mouvoir comme un système unique ; suivant qu'ils sont identiques ou différents par leur masse, leur intensité ou le nombre de leurs nœuds, c'est une simple transformation allotropique ou une véritable combinaison chimique qui s'est produite. La réunion est durable ou temporaire, suivant que certaines relations entre les propriétés des anneaux sont ou non satisfaites. Dans le premier cas, la combinaison est permanente et totale; dans le second, la transformation est incomplète, limitée par les circonstances extérieures; c'est la dissociation.

Le milieu lui-même, la matière unique, ne peut-il pas servir à la propagation de toutes les actions physiques?

20. Dans ses traits généraux, l'hypothèse est assez séduisante pour mériter un examen approfondi, autant du moins que l'état actuel de la théorie des tourbillons peut le permettre.

Les difficultés ne manquent pas, et il importe de les signaler avec impartialité : ce sont autant de points délicats de la théorie des fluides, qui méritent d'exercer la sagacité des analystes. La première est relative à la notion de *masse* d'un petit volume du milieu contenant un assez grand nombre d'atomes-tourbillons pour que

ses propriétés dépendent seulement de l'état moyen. Deux définitions expérimentales différentes de la masse ont cours dans la Science et sont traitées comme rigoureusement équivalentes : une définition mécanique, une astronomique [1]. La masse mécanique d'un groupe d'atomes est évidemment définie par la nature même de l'hypothèse; mais il n'en est pas de même de la masse astronomique. Avec les seuls atomes-tourbillons, dans un milieu liquide, les premiers termes de l'action mutuelle apparente sont en raison inverse de la quatrième puissance de la distance et dépendent en outre de tout ce qui définit les deux anneaux et leur orientation relative. Pour rendre compte de l'attraction newtonienne, Sir W. Thomson (1873) a rappelé l'hypothèse de Lesage (1782-1818) qui semble faite pour les atomes-tourbillons. Lesage se représente les particules matérielles non comme des solides pleins, mais comme de fines charpentes creuses. L'espace est supposé rempli de projectiles, extraordinairement petits par rapport aux atomes matériels, marchant en tous sens avec des vitesses prodigieuses; parmi tous ceux qui passent dans le domaine de l'atome, un nombre excessivement petit le rencontrent; ceux-là sont déviés de leur route, avec une petite diminution de leur quantité de mouvement. L'ensemble des corpuscules qui se dirigent vers l'atome possède une quantité de mouvement plus grande que ceux qui en émanent. Un autre atome exposé à leurs chocs sera donc poussé vers le premier par une force inversement proportionnelle au carré de la distance; quant à la loi des masses, elle dérivera des hypothèses faites sur la loi de perte de mouvement par le choc. Si la diminution relative de la quantité de mouvement des corpuscules par un atome est suffisamment petite, l'attraction sera proportionnelle aux masses, même pour des corps aussi gros que les astres. Imaginons maintenant que ces corpuscules soient de petits volumes très allongés, animés de mouvement tourbillonnaire, et que, dans leur rencontre avec les atomes infiniment plus grands, la perte de quantité de mouvement (n° **11**) ait toujours lieu aux dépens du corpuscule : l'hypothèse de Lesage s'appliquera intégralement à la théorie tourbillonnaire.

La propagation de la lumière dans ce milieu incompressible semble d'une explication assez difficile. Pourtant, en 1878, M. Forbes a proposé d'en charger les corpuscules de Lesage, mis en vibration par les atomes-tourbillons qu'ils rencon-

---

[1] On cite, pour preuve de l'identité des deux définitions, l'expérience de Galilée sur les pendules simples de diverses matières, l'expérience de Newton sur la chute des corps dans le vide. Il est indispensable d'y ajouter pour les corps gazeux l'égalité de la valeur expérimentale de la vitesse du son dans l'air et de la valeur calculée au moyen de la loi de compressibilité du gaz (relation entre le volume et la pression mesurée en poids par unité de surface) et du poids spécifique employé dans les équations du mouvement comme équivalent à la densité *mécanique*. La conservation de la masse *astronomique* dans toutes les transformations connues de la matière est démontrée par les innombrables mesures faites avec la balance; je ne connais pas une expérience *directe* établissant *avec quelque rigueur* la conservation de la masse *mécanique*, d'un kilogramme d'eau par exemple, passant à l'état de vapeur. La démonstration indirecte repose sur le principe de l'identité des deux définitions de la masse regardé comme établi par les trois expériences citées plus haut et par l'accord des conséquences du principe avec l'expérience.

trent; si cette hypothèse se prête facilement à l'explication des phénomènes d'absorption, d'interférences, de polarisation, elle semble plus difficile à adapter à la réflexion et à la réfraction. La vitesse de transport de l'énergie lumineuse, égale à la vitesse de translation des corpuscules, est sensiblement indépendante du milieu, à cause de l'uniformité de l'attraction universelle, et n'a d'ailleurs aucun lien nécessaire avec le quotient de la longueur d'onde par la durée de vibration, car la vibration doit se mouvoir constamment le long du corpuscule.

D'autre part, J.-C. Maxwell a publié (*Ph. Mag.*, 1861-1862) une explication rigoureuse et complète des phénomènes électriques et magnétiques au moyen d'un milieu liquide animé de mouvements rotatoires convenables et de petits corps plongés dans ce liquide. L'hypothèse est loin d'être simple : elle semble assez difficile à relier à celle des atomes-tourbillons; mais elle fournit les lois numériques des phénomènes électriques et magnétiques et, par conséquent, celle des principaux phénomènes lumineux. On peut donc espérer, même avec un fluide incompressible unique, rendre compte un jour de toutes les actions physiques.

Quant à moi, j'aimerais mieux renoncer à l'hypothèse d'un liquide et chercher, parmi les milieux fluides et compressibles à actions élastiques tangentielles (n° 7) dans lesquels un anneau-tourbillon conserve son intensité totale, s'il n'en est pas qui, sans aucun corpuscule de Lesage, puisse rendre compte et de l'attraction newtonienne et des phénomènes physiques (¹).

21. Autre difficulté dans l'hypothèse tourbillonnaire : pourquoi n'y a-t-il qu'un nombre restreint de matières distinctes, ayant des poids atomiques nettement définis? Y a-t-il des conditions de stabilité de forme qui dépendent de la masse de l'atome? Cela ne semble guère probable si l'on n'y ajoute quelque autre restriction, par exemple celle qu'indique J.-J. Thomson (*Motion of vortex rings*, p. 118; 1883) : l'intensité doit être la même pour tous les corps simples, afin qu'ils puissent former des combinaisons chimiques permanentes. Lorsque deux anneaux à axe circulaire s'accompagnent, tous deux oscillent autour d'une même circonférence moyenne, de rayon a, en se maintenant à une distance minimum d l'un de l'autre. L'identité des vitesses de translation fournit, entre ces quantités, les intensités I et I' et les volumes ϖ, ϖ', une relation

$$\log(2\pi^2 d^2 a) = \frac{\mathrm{I}\log\varpi - \mathrm{I}'\log\varpi'}{\mathrm{I}-\mathrm{I}'} = \text{const.},$$

qui détermine la distance d en fonction de la circonférence, sauf dans le cas où I et I' sont égales, ainsi que ϖ et ϖ'. C'est dans ce dernier cas seulement que d et a peuvent varier arbitrairement, et que les actions même violentes ne séparent pas

(¹) M. Hicks a publié, dans les *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, un essai d'explication de la gravitation des atomes-tourbillons que je n'ai pu me procurer.

les deux anneaux. Par extension pour un nombre quelconque d'atomes, J.-J. Thomson admet que la stabilité exige que l'intensité soit la même pour chacun d'eux ([1]). Mais, si les intensités sont égales, les volumes le sont aussi, et les atomes à axe circulaire, en quoi diffèrent-ils désormais ? Peut-être peut-on le découvrir dans une certaine torsion de l'anneau, qui donne à celui-ci la forme d'une sorte d'hélice à un ou plusieurs tours, enroulée sur un tore, et le rend analogue plutôt à un solénoïde fermé qu'à un courant circulaire.

Sir W. Thomson a démontré (1880) que ces formes (*fig.* 10) sont permanentes,

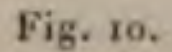
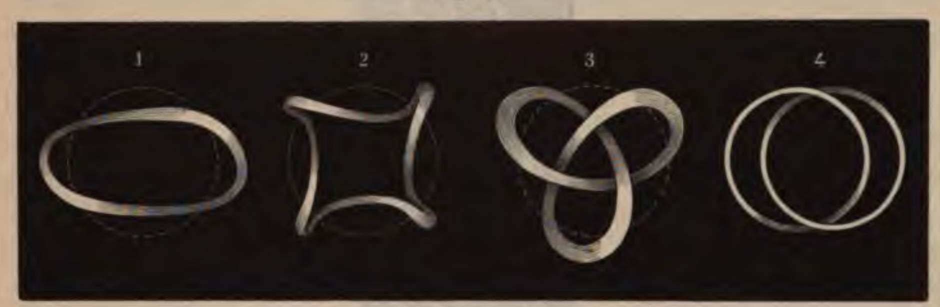


Fig. 10.



pourvu que l'anneau ait un mouvement de translation hélicoïde ; mais sont-elles stables même pour les déformations qui les rapprochent de la forme circulaire? C'est une question que les travaux de J.-J. Thomson laissent pendante, et que je serais tenté de résoudre par l'affirmative. Dans l'anneau ramené à la forme circulaire, la rotation peut être oblique à la section méridienne, comme l'a remarqué M. Bolzmann (1873); c'est seulement pour le cas où la rotation est normale à la section méridienne que J.-J. Thomson a établi la stabilité de la forme circulaire; pour la rotation oblique, il est probable que la stabilité est reportée à une forme qui révèle au dehors la direction de la rotation en chaque point. Dès lors la condition pour que deux anneaux s'accompagnent devient plus compliquée ; il y entre, outre les intensités, les volumes et les dimensions, deux constantes de plus, les nombres de spires. Si l'identité des intensités est encore nécessaire, la conséquence doit être qu'il existe une certaine relation entre les volumes et les nombres de spires. Les équivalents des différents corps seraient des fonctions de nombres entiers, fonctions différentes suivant le nombre des nœuds, susceptibles d'un classement périodique en séries grossièrement parallèles, comme celui de Mendelejef,

---

([1]) Cette conclusion me semble excessive. Les deux anneaux sont si près l'un de l'autre que les actions extérieures qu'ils subissent sont évidemment peu différentes, et, après une période de trouble, ils auront pris par les actions extérieures et leurs réactions mutuelles les dimensions liées par la constance du produit ad^2, nécessaires pour qu'ils continuent à cheminer ensemble, surtout si l'on remarque que dans la vitesse de chacun d'eux le terme qui provient de d n'est qu'une petite fraction de la vitesse totale.

si toutefois les volumes des termes successifs de la série étaient assez différents pour correspondre aux équivalents.

22. Quoi qu'il en soit, admettons avec J.-J. Thomson que l'intensité est la même pour tous les corps, et que la seule disposition stable est celle où les sections des anneaux par un plan méridien occupent les sommets d'un polygone régulier (n° 10). Il n'y a pas d'atomes noués présentant plus de six branches parallèles (*fig.* 11). Un

Fig. 11.



atome à n branches parallèles ne peut pas s'unir à moins de n atomes simples formant un groupe unique. Les composés successifs comprennent un, deux, trois, quatre ou cinq groupes de n atomes simples (ou l'équivalent), mais pas davantage [1]. Si le composé est plus complexe, sa molécule est la réunion de moins de sept groupes tous équivalents. On voit en quoi cette notion diffère de la notion ordinaire d'atomicité ; elle fixe l'échelle suivant laquelle un atome multiple peut se combiner avec des atomes simples, et une capacité de saturation pour la formation d'une molécule simple. Mais la combinaison avec moins de six groupes ne laisse pas de vide à combler dans la molécule; une molécule saturée peut entrer tout aussi bien qu'une autre comme groupe simple dans une molécule plus complexe; il n'est point nécessaire qu'un des atomes de chaque groupe ait une *atomicité* disponible pour que les deux groupes puissent former un composé stable. Cette notion, qui joue un si grand rôle dans les représentations graphiques de la constitution moléculaire des corps par l'École atomiste, ne trouve toujours pas de représentation mécanique acceptable.

(1) Dans cet ordre d'idées, J.-J. Thomson conclut de l'existence des composés PhH^3, PhH^5 et CO, CO^2, que le phosphore doit être monoatomique, comme l'hydrogène, et le carbone seulement diatomique (1883, p. 122).

23. *Théorie cinétique des gaz.* — Nous avons vu qu'en présence d'un plan indéfini un anneau n'éprouve pas de réflexion; il grandit indéfiniment. Il n'en est pas de même dans un vase fermé. Dans un cylindre à bases planes par exemple, un anneau perpendiculaire à l'axe s'approche d'une des bases en s'élargissant; son diamètre devient presque égal à celui du cylindre. Dès lors les parois latérales ajoutent leur action retardatrice à celle du fond; l'anneau s'arrête, grandit encore et remonte le long des parois à peu près comme un tourbillon rectiligne le long d'un plan; en approchant de la seconde base, il se rétrécit, se ralentit et repart suivant l'axe. Si le volume est occupé par un grand nombre de tourbillons, le mouvement de chacun d'eux est de même approximativement limité par les tourbillons voisins. Chaque tourbillon qui vient se réfléchir sur la paroi exerce sur celle-ci une impulsion totale, égale à la variation d'une quantité analogue à une quantité de mouvement : le produit $2\rho ISV$, où S désigne l'aire plane maximum limitée par l'axe fermé du tourbillon (Ch. II) et V sa vitesse de translation. Par leur grand nombre les chocs des anneaux produisent une pression uniforme et constante dont l'expression, analogue à celle de la théorie cinétique ordinaire, est $\frac{2}{3}\Sigma 2\rho ISV$ (Sir W. Thomson, *Nature*, XXIV). Ce raisonnement n'a pas d'ailleurs la même portée que dans la théorie cinétique ordinaire, puisque la notion de pression se trouve au début de notre hypothèse. D'après J.-J. Thomson (1883), le produit de cette pression par le volume du vase est égal à un tiers de l'énergie cinétique T, diminué d'une quantité positive $\frac{1}{6}\rho\int\int q_0^2 K\,dS$; ρ est la densité du fluide, matière unique de l'univers, K la distance de l'origine des coordonnées au plan tangent à la surface du vase le long de l'élément dS, q_0^2 la moyenne des carrés de la vitesse du fluide au même point. On obtient donc la loi de Mariotte-Gay-Lussac, avec un terme soustractif probablement petit, si la vitesse est petite sur la surface. Ce terme témoigne en faveur de la théorie actuelle; la théorie cinétique simple ne pouvait expliquer aucun écart de la loi de Mariotte; corrigée par Maxwell, pour la viscosité, par l'addition d'une répulsion en raison inverse de la cinquième puissance de la distance, elle donnait un terme additif, contraire aux résultats de Regnault [1].

24. J'ajouterai que le terme complémentaire peut être mis sous une forme très simple. D'après la nature même de la question, q_0^2 est sensiblement uniforme et constant sur la surface, et $\frac{1}{3}\int\int K\,dS$ n'est autre chose que le volume total. On arrive donc à

$$pv = \frac{1}{3}T - \frac{1}{2}\rho q_0^2 v,$$

où T est proportionnel à la température absolue. L'intérêt d'une théorie complète

[1] Lire aussi un Mémoire récent de J.-J. Thomson : *The vortex-ring theory of gazes : On the law of the distribution of energy among the molecules* (*Proc. R. S. London*, XXIX, 1885).

serait dans la détermination de la valeur moyenne q_0^2 sur la surface en fonction de la valeur moyenne q^2 relative au volume entier, c'est-à-dire de l'énergie cinétique totale T, et du volume spécifique v. Le rapport de q_0^2 à q^2 est probablement d'autant plus petit que v est plus grand et les atomes-tourbillons plus éloignés les uns des autres, et tend vers zéro quand le volume croît indéfiniment; on pourrait alors développer $\frac{1}{2}\rho q_0^2 v$ en série suivant les puissances négatives de v, avec T en facteur, les coefficients de la série ne dépendant plus que de T. La loi de compressibilité serait analogue à la formule empirique connue adoptée par Clausius à la fois pour les gaz, les vapeurs et même les liquides.

Diffusion. Viscosité. Conductibilité thermique. — Une différence considérable avec la théorie cinétique ordinaire, c'est que, au moins pour un gaz à atomes simples, l'accroissement d'énergie cinétique, de température, correspond à une *diminution* dans la vitesse de translation de l'atome. L'influence de la température sur les lois de la diffusion, de la viscosité, de la conductibilité thermique, sera différente de celle qu'indique la théorie cinétique ordinaire; or on sait que cette théorie est précisément en désaccord avec l'expérience sur ce point. L'état de la théorie tourbillonnaire ne permet pas encore de décider si elle trouve là une nouvelle confirmation.

25. Telle est dans son développement actuel l'hypothèse des atomes-tourbillons; j'espère qu'on ne se méprendra pas sur le sentiment qui m'a fait l'exposer longuement et quelquefois indiquer les routes diverses qui semblent se détacher du chemin principal, et qui sont peut-être préférables. Il est toujours facile de rendre vraisemblable dans ses traits généraux une hypothèse quelconque; mais ce n'est là qu'un exercice d'imagination sans utilité scientifique. Il faut serrer de près les conséquences, atteindre les lois numériques, les comparer à l'expérience. Ce travail, dût-il anéantir l'hypothèse, ne saurait être inutile; il enrichit l'esprit de vues nouvelles sur tout un ordre de questions, le rend indépendant des traditions régnantes, lui fait entrevoir la possibilité de relations d'une certaine nature, déterminée, entre des phénomènes regardés comme distincts, ou au contraire d'une indépendance complète entre des quantités regardées comme identiques; et cela avec toute la précision qu'une image matérielle peut donner à une conception de l'esprit. Autant de questions nouvelles qui n'étaient même pas posées jusque-là, et dont il faut désormais demander la réponse à l'expérience. Une hypothèse n'est qu'un moyen de forcer la pensée à renoncer à ses habitudes; peu importe qu'elle soit plus ou moins bonne; pour être utile, il faut qu'elle soit originale et susceptible de précision. Je pense qu'on ne saurait refuser ni l'une ni l'autre de ces qualités à l'hypothèse des atomes-tourbillons.

CHAPITRE II.

ÉCOULEMENT DES LIQUIDES. — JETS. — MOUVEMENT D'UN SOLIDE OU D'UN TOURBILLON DANS UN LIQUIDE.

26. Quand on veut appliquer les équations fournies par la théorie générale à la solution d'un problème réel particulier, ce ne sont pas seulement des difficultés analytiques que l'on rencontre. Les simplifications que l'on a introduites dans la théorie, en supposant le fluide dénué de frottement, rendent impossible de satisfaire à une partie des conditions naturelles aux parois, et la solution incomplète qui en résulte n'est applicable qu'aux mouvements lents; elle conduirait, lorsque les mouvements sont rapides, à des pressions négatives ou tensions énormes dans le liquide partout où il y a une variation rapide de direction de la vitesse et particulièrement le long des parois dont la courbure est très grande. Helmholtz a montré, dans une Note de 1868, comment l'absence supposée de tout frottement dans le liquide rend possibles certains mouvements discontinus, systématiquement laissés de côté jusqu'alors comme impossibles dans un liquide naturel, mais qui sont précisément un état limite des mouvements réels, état dans lequel ne se rencontrent plus les tensions énormes incompatibles avec l'état fluide.

Occupons-nous seulement des cas où la pression est une fonction de la densité, et où les forces extérieures X, Y, Z sur l'unité de masse sont les dérivées prises en signe contraire, $-\frac{\partial V}{\partial x}$, $-\frac{\partial V}{\partial y}$, $-\frac{\partial V}{\partial z}$, d'un potentiel V. Quand dans un fluide parfait le mouvement prend naissance à partir du repos, les rotations élémentaires, nulles au début, restent constamment nulles et il existe un potentiel des vitesses φ. Les équations relatives à l'intérieur du fluide sont alors

$$p = f(\rho),$$

$$\int \frac{dp}{\rho} + V + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + F(t),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \rho\,\Delta_2\varphi = 0.$$

$F(t)$ est une fonction du temps seul, indépendante de x, y, z, qui, dans la plupart des problèmes, se réduit à une constante. L'élimination de p, ρ entre ces équations conduirait à une équation en φ compliquée à cause de la fonction f. Quand la fonction f se réduit à une puissance de ρ, ce qui comprend les deux cas prin-

cipaux relatifs aux gaz parfaits, on trouve facilement

$$p = \mathrm{A}\rho^m,$$

$$\frac{m}{m-1}\mathrm{A}\rho^{m-1} = \mathrm{F}(t) - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mathrm{V} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right],$$

$$\left\{\mathrm{F}(t) - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mathrm{V} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}(m-1)\Delta_2\varphi$$
$$+ \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left\{\mathrm{F}(t) - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mathrm{V} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\} = 0,$$

en introduisant la notation $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ pour abréger l'écriture (n° 5).

La dernière équation contient toutes les dérivées secondes de φ en x, y, z, t; elle n'est d'ailleurs pas linéaire, mais contient des produits de deux dérivées premières de φ par une dérivée seconde. On sait comment on réduit la difficulté du problème, dans le cas des petites oscillations sur place, en négligeant dans l'équation en φ tous les termes d'ordre supérieur au premier, et dans le cas des mouvements continus en négligeant la compressibilité.

Dans ce dernier cas, les équations prennent la forme simple

$$\frac{p}{\rho} = \mathrm{F}(t) - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mathrm{V} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right], \tag{1}$$

$$\Delta_2\varphi = 0, \tag{2}$$

et il faut les intégrer en tenant compte des conditions à la surface limite du liquide.

27. Lorsqu'il n'y a pas de surface libre et que le liquide emplit entièrement un vase, limitant un espace simple (n° 4), la vitesse normale à la paroi est nulle partout.

Si le liquide entre par certaines ouvertures et sort par d'autres, avec des vitesses normales connues, on sait que la valeur de φ est entièrement déterminée à une constante près; c'est une propriété connue des solutions de l'équation (2). On ne peut donc satisfaire à aucune autre condition relative aux vitesses : les vitesses ont des valeurs déterminées partout. On a ensuite la pression en un point quelconque par la première équation, si l'on connaît la fonction $\mathrm{F}(t)$ ou, ce qui revient au même, la loi de variation de la pression avec le temps en un point particulier.

La pression peut varier dans des limites très étendues; ordinairement, elle se trouve déterminée, dans le voisinage d'un des orifices, par des circonstances extérieures indépendantes du débit. Tant que le débit est assez faible, la pression fournie par la formule (1) est partout positive; elle est d'autant moindre que le

débit est plus grand, et quand le débit dépasse une certaine valeur, la pression fournie par la formule (1) serait négative, d'abord en certains points particuliers de la paroi où la vitesse est maximum, puis dans des régions de plus en plus étendues autour de ces points. C'est là un résultat inadmissible; s'il y avait de pareilles régions, rien ne retiendrait le liquide contre la paroi, le mouvement changerait peu à peu de caractère, une surface libre apparaîtrait autour de chaque point de pression nulle, d'autant plus étendue que le débit serait plus grand.

La solution analytique ne correspond plus à la réalité.

28. Précisons sur un exemple bien connu de mouvement permanent à deux variables : dans ce cas il est commode d'employer, en même temps que le potentiel des vitesses Φ, une fonction Ψ qui caractérise les lignes de courant, orthogonales aux lignes de niveau. La différence des valeurs de Ψ en deux points mesure la quantité de liquide qui traverse, pendant l'unité de temps, une ligne quelconque tracée entre ces deux points.

On satisfait à l'équation (2), en prenant pour Φ et Ψ la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans une fonction arbitraire de $x+y\sqrt{-1}$. Inversement on peut regarder x et y comme fonctions des deux coordonnées curvilignes Φ et Ψ.

Exemple I (*fig.* 12). — *Ouverture en mince paroi.*

$$x+y\sqrt{-1} = A\frac{e^{a(\Phi+\Psi\sqrt{-1})} - e^{-a(\Phi+\Psi\sqrt{-1})}}{2}$$

donne

$$\left\{\begin{aligned} x &= A\frac{e^{a\Phi} - e^{-a\Phi}}{2}\cos a\Psi, \\ y &= A\frac{e^{a\Phi} + e^{-a\Phi}}{2}\sin a\Psi. \end{aligned}\right.$$

Les lignes de niveau Φ sont les ellipses homofocales

$$\frac{4x^2}{A^2(e^{a\Phi} - e^{-a\Phi})^2} + \frac{4y^2}{A^2(e^{a\Phi} + e^{-a\Phi})^2} = 1.$$

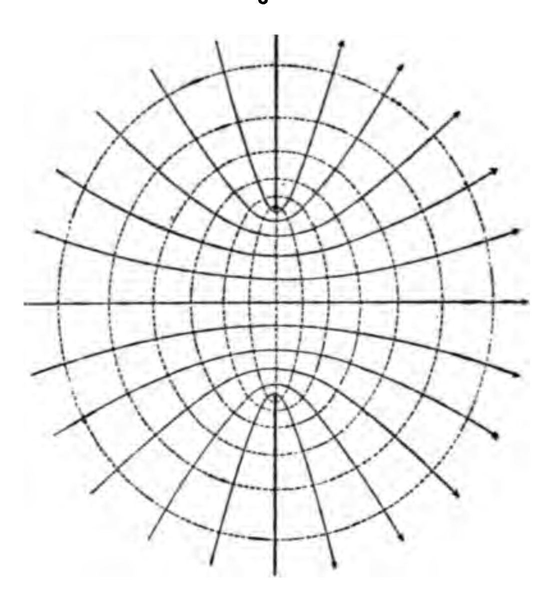
Les lignes de flux Ψ sont les hyperboles homofocales

$$\frac{x^2}{A^2\cos^2 a\Psi} - \frac{y^2}{A^2\sin^2 a\Psi} = -1,$$

et une quelconque de ces lignes peut être regardée comme une paroi fixe. En particulier, les portions de l'axe des y pour lesquelles on a $y^2 > A^2$ sont : l'une, la ligne de flux $\Psi = -\frac{\pi}{2a}$, l'autre la ligne de flux $\Psi = +\frac{\pi}{2a}$.

Le liquide s'écoule ainsi du côté gauche au côté droit du plan $x = 0$ à travers l'ouverture $x = 0$, $y^2 < A^2$. La vitesse du liquide en un point P situé à une distance très grande est dirigée suivant le rayon vecteur qui joint le point P à

Fig. 12.



l'origine des coordonnées, milieu de l'ouverture; elle est inversement proportionnelle à la longueur de ce rayon vecteur et indépendante de l'azimut. Le débit total pendant l'unité de temps est $\frac{\pi}{a}$. La vitesse en un point Φ, Ψ quelconque est

$$\frac{2}{A a \sqrt{(e^{a\Phi} + e^{-a\Phi})^2 \cos^2 a\Psi + (e^{a\Phi} - e^{-a\Phi})^2 \sin a\Psi}}.$$

En particulier, aux bords de l'ouverture, $x = 0$, $y^2 = A^2$, ou $\Phi = 0$, $\Psi = \pm \frac{\pi}{2a}$, la vitesse devient infinie, ce qui est évidemment inadmissible. Quant à la pression, si aucune force extérieure n'agit sur la masse, elle est donnée par

$$p = p_0 - \frac{\rho}{A^2 a^2} \frac{1}{(e^{a\Phi} + e^{-a\Phi})^2 \cos^2 a\Psi + (e^{a\Phi} - e^{-a\Phi})^2 \sin^2 a\Psi},$$

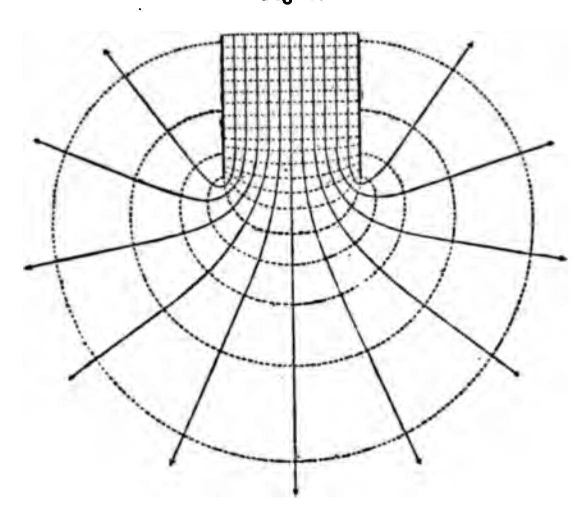
en appelant p_0 la pression uniforme à une très grande distance de l'ouverture ($\Phi = \pm \infty$). La pression serait négative dans deux régions qui entourent les bords de l'ouverture, et même dans toute une région étendue comprenant toute l'ouverture, pour un grand débit; ce qui est évidemment absurde.

Exemple II (*fig.* 13). — Un autre exemple fort intéressant, dû à Helmholtz,

correspond à l'écoulement par un tube vertical ouvert par le bas dans un très grand vase. Le liquide descend dans le tube, arrive à l'ouverture, en contourne les bords et remonte en s'épanouissant tout autour du tube.

Loin de l'ouverture, la vitesse dans le vase est rayonnante et sensiblement en

Fig. 13.



raison inverse de la distance au milieu de l'ouverture du tube, comme dans l'exemple précédent. Dans le tube et loin de l'ouverture, la vitesse est verticale uniforme de haut en bas. Ce mouvement est donné par

$$x + y\sqrt{-1} = -A\sqrt{-1}\left[a(\Phi + \Psi\sqrt{-1}) + e^{a(\Phi+\Psi\sqrt{-1})}\right]$$

ou

$$\begin{cases} x = Aa\Psi + Ae^{a\Phi}\sin a\Psi, \\ y = -Aa\Phi - Ae^{a\Phi}\cos a\Psi. \end{cases}$$

Les parois du tube sont données par $\Psi = \pm\frac{\pi}{a}$:

$$x = \pm A\pi, \qquad y \geqq +A.$$

Ici encore, la vitesse devient infinie au bord du tube, et suivant la valeur de p_0, qui correspond aux points où la vitesse est nulle, la région où la pression devient négative s'étend plus ou moins autour des bords de l'orifice.

29. La même difficulté se rencontre toutes les fois que les parois présentent des angles vifs, quelque lent que soit le débit, et pour des parois arrondies dès que le débit dépasse une certaine limite. Elle est inévitable tant qu'on suppose Φ continu et fini dans tout l'intérieur du liquide, puisque la forme des parois

et la distribution des vitesses normales dans les ouvertures déterminent entièrement la valeur de Φ.

L'hypothèse arbitraire, comme l'a remarqué Helmholtz (1868), c'est celle de la continuité de Φ et de ses dérivées dans un fluide sans frottement. Dans les fluides naturels nous devons supposer que les vitesses varient d'une manière continue d'un point à l'autre, parce qu'une différence finie de vitesse entre deux couches en contact ferait naître un frottement infini; mais, dans un liquide absolument dénué de frottement, rien ne s'oppose à cette discontinuité. Cela est si vrai qu'on est obligé de subir cette discontinuité à la surface de séparation de deux liquides différents; avec les fonctions arbitraires que les équations des fluides sans frottement laissent disponibles, on ne peut satisfaire qu'à deux conditions à la surface de séparation :

1° Contact permanent des deux fluides, sans production de vide entre les deux, assuré par l'égalité des vitesses normales à la surface de séparation, évaluées de part et d'autre;

2° Équilibre de cette surface géométrique, dénuée de masse, mobile ou en repos, assuré par l'égalité des pressions de part et d'autre (n° 5).

Quant aux vitesses tangentielles, elles se trouvent complètement déterminées par la solution qui satisfait aux deux autres conditions, et elles ne sont en général ni égales, ni même parallèles dans les deux fluides; il en est de même des dérivées de la pression dans le sens normal à la surface de séparation.

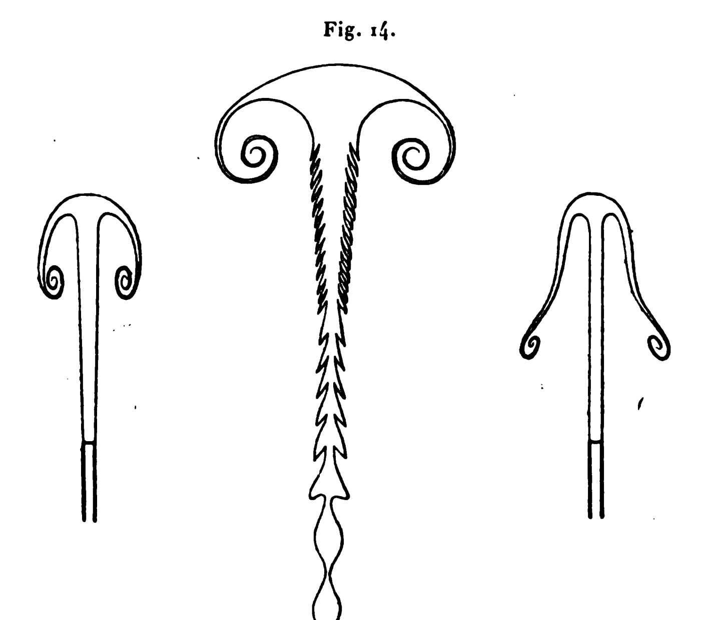
Dans l'intérieur d'un fluide sans frottement les conditions de continuité physique de la matière et de continuité mécanique des forces intérieures sont entièrement satisfaites si la pression est partout continue et positive, et si, à travers les surfaces de discontinuité des vitesses, la vitesse normale reste continue.

30. *Expériences.* — Avant de pousser plus loin la discussion, remarquons que des mouvements de ce genre se produisent constamment sous nos yeux; le courant d'air qui s'échappe d'un soufflet ne s'épanouit pas immédiatement en tous sens : il forme à la sortie du tube un jet un peu conique à l'intérieur duquel le mouvement de l'air est concentré; ce jet est séparé de l'air extérieur en repos, non pas par une surface de discontinuité géométrique, mais par une couche peu épaisse de tourbillons, et s'étend sur une longueur de quelques décimètres; il est facile de mettre en évidence l'existence du jet en le produisant régulièrement avec une soufflerie dont l'air est chargé de fumées de chlorhydrate d'ammoniaque. Le jet régulier, au sortir du tube, se trouble à quelque distance, prend un aspect floconneux et finit par se mêler à l'air.

De même, un courant continu d'eau teintée, qui coule par un tube de verre immergé dans un grand réservoir plein d'eau en repos, forme à la sortie un jet cylindrique; le frottement interne de l'eau, bien plus considérable que celui de

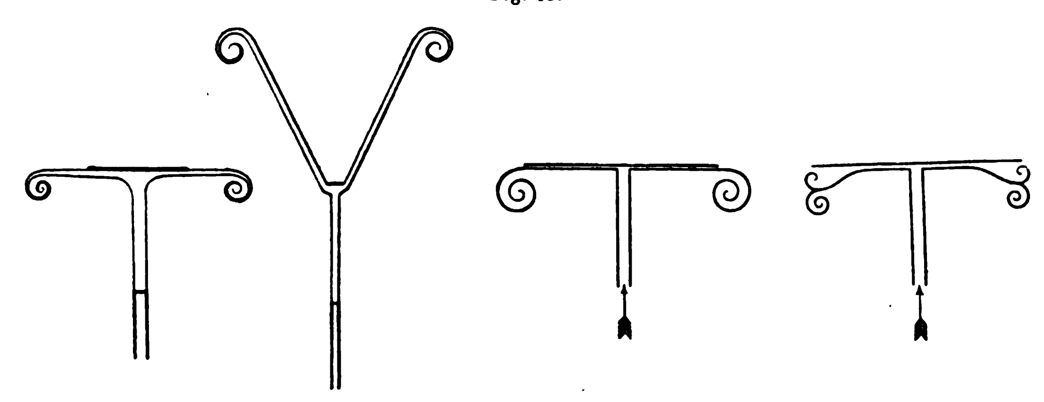
l'air, trouble le mouvement de la colonne liquide à quelques décimètres de l'ori-

Fig. 14.



fice du tube, et lui donne l'apparence d'une sorte de champignon dont les bords grandissent constamment en s'enroulant; la hauteur de la partie cylindrique est

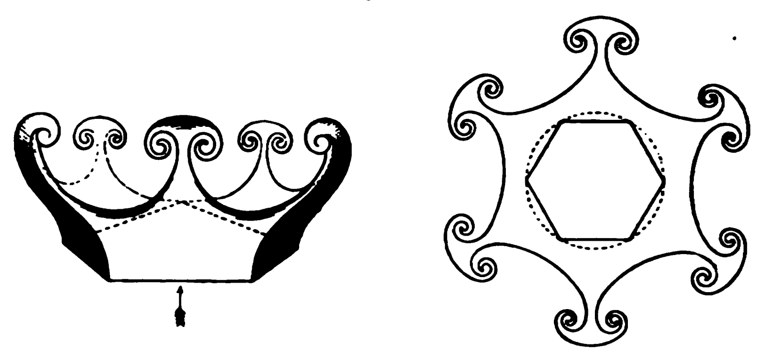
Fig. 15.



d'autant plus grande que la pression d'écoulement est plus forte; le jet prend une forme curieusement dentelée, quand le débit subit de petites variations périodiques; M. Oberbeck a observé les formes de ces surfaces d'écoulement (*fig.* 14), et M. Kötschau a examiné en outre les formes complexes que prend le jet à la

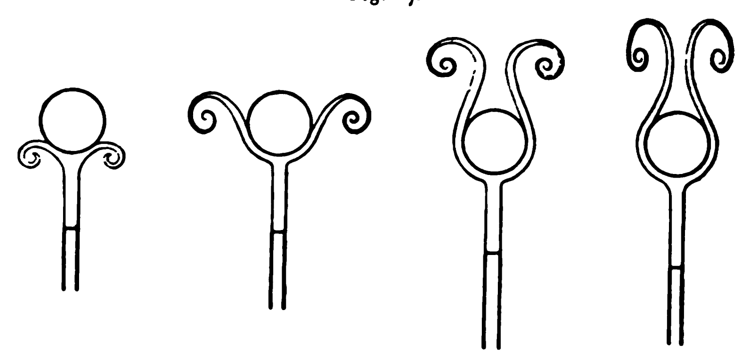
rencontre d'un obstacle : il n'enveloppe pas toujours l'obstacle; il en suit la surface sur une certaine étendue, puis s'en sépare en formant une sorte de coupe à bords nettement limités, et qui s'enroulent à la façon des anneaux-tourbillons

Fig. 16.



naissants, dès que le frottement est trop grand. Les *fig.* 15 et 16 montrent quelques-unes des formes relatives à un plan mince à bords vifs. Pour le plan mince, pas trop large, le jet s'en détache tangentiellement à la face inférieure, dès qu'il a atteint le bord; le rayon de courbure de la surface de discontinuité dans cette région est d'autant plus grand que la vitesse est plus grande. Pour le corps rond,

Fig. 17.



le jet le contourne entièrement lorsque la vitesse est petite; il commence à se détacher du sommet, et forme une sorte de calice autour de la boule, avec une très petite ouverture, lorsque la vitesse devient plus grande; il se sépare d'autant plus de la boule que la vitesse est plus grande, en même temps que l'ouverture grandit, et finit par former une large coupe étalée qui ne touche la boule que sur la très petite calotte directement atteinte par le jet. C'est du moins ce qui se produirait dans un liquide sans frottement. Dans un liquide naturel, lorsque la vitesse du jet est faible, les frottements détruisent le jet avant qu'il ait entière-

ment contourné l'obstacle; il y a une certaine vitesse finie, pour laquelle l'étendue de la surface de contact du jet avec la paroi est maximum, et c'est seulement pour des vitesses plus grandes que le sens des variations est le même que dans un fluide parfait. La *fig.* 17, empruntée au Mémoire de M. Oberbeck, montre les phases successives de l'état variable depuis le début de l'écoulement jusqu'à l'état permanent, pour un débit constant.

Il ne s'agit, bien entendu, que des mouvements qui se produisent à l'intérieur d'un fluide homogène, et non des jets d'un fluide dans un fluide différent, jets d'eau, jets de gaz, jets d'air chaud dans l'air ordinaire dont la forme et le mouvement ont souvent pour cause principale la pesanteur.

31. Ainsi, en laissant provisoirement de côté divers phénomènes accessoires, l'expérience montre que dans un fluide naturel des portions contiguës peuvent être animées de mouvements très différents; que cet état se produit toujours quand la vitesse d'écoulement dépasse une certaine limite, d'autant plus faible que les parois présentent des bords plus aigus; que la forme de la surface de séparation dépend de la vitesse. Dans des circonstances analogues, c'est une surface de discontinuité des vitesses qui est l'état limite correspondant pour un fluide parfait.

Cette surface équivaut à une couche infiniment mince de tourbillons (n° 6); donc elle sépare deux portions du fluide entièrement distinctes et qui ne peuvent se mélanger. Comme couche de tourbillons, elle est fermée, ou indéfinie, ou limitée à une paroi; mais de toute façon elle sépare deux régions de l'espace. Une masse fluide ne peut la traverser, car la rotation élémentaire de cette masse nulle au début deviendrait infinie au passage à travers la surface de discontinuité, ce qui est impossible dans un fluide parfait où la rotation élémentaire d'une masse est invariable.

Tant que dure l'écoulement, la surface de discontinuité se meut avec le fluide et s'accroît par conséquent de nouveaux éléments, là où se produit le jet; elle naît au point où le jet se sépare de la paroi, et c'est là que se produit la discontinuité des forces motrices qui provoque la formation de la surface de discontinuité.

Quand le débit est assez grand pour que, dans le mouvement continu, la valeur de la pression en certains points devienne négative, le mouvement change de caractère; deux cas principaux peuvent se présenter, qu'il est facile de discerner lorsqu'il s'agit des liquides.

Premier cas. — Le liquide remplit entièrement le vase dans lequel il se meut; alors, pour que la pression reste partout positive, ses dérivées deviennent nécessairement discontinues le long de la surface de pression nulle; il en est de

même de la vitesse, et une nouvelle forme d'écoulement en résulte, avec une surface de discontinuité au sein du liquide [1].

Deuxième cas. — Le liquide n'emplit pas entièrement le vase; alors de nouvelles surfaces libres peuvent naître aux points où la pression devient nulle, et modifient complètement le régime d'écoulement [2].

32. Helmholtz ne s'est pas borné à faire ces remarques générales, il a en même temps (1868) fourni le premier exemple de leur application. L'année suivante (1869), Kirchhoff a réussi à en former un assez grand nombre, dont les conditions à grande distance sont à peu près celles d'un courant uniforme et indéfini; il en a perfectionné notablement le mode d'exposition dans son *Traité de Physique mathématique* (Chap. XXI, XXII; 1877); sous cette dernière forme, la plupart de ces exemples ont été reproduits dans le *Traité du mouvement des fluides de H. Lamb* (1879), p. 98-109. Enfin M. Planck a indiqué dans les *Annales de Poggendorff* (1884) un autre moyen d'arriver aux mêmes résultats. Tous ces travaux sont relatifs aux mouvements permanents plans; les lignes de niveau et les lignes de flux sont définies par deux fonctions Φ, Ψ, qui sont la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ d'une fonction quelconque de la variable complexe $x+y\sqrt{-1}$. D'ailleurs, dans presque tous ces exemples, les conditions à grande distance diffèrent notablement de celles que la réalité impose, dans les circonstances analogues. Ainsi, quand le liquide sort du tube plat formé par les deux plans limités de l'Exemple II, Helmholtz adopte pour surfaces de discontinuité le prolongement de ces plans; le liquide formera un jet rectiligne indéfini; les conditions à grande distance dans le vase extérieur au tube

---

(1) Dans une Communication récente à la Société Royale de Londres (févr. 1887), Sir W. Thomson a examiné cette question sous un point de vue nouveau : une boule se meut dans un liquide indéfini, en repos à grande distance; quand sa vitesse de translation dépasse une certaine limite, ce n'est pas une surface de discontinuité partant de la surface de la boule qui se formera : ces surfaces sont instables (n° 40). C'est une surface libre, qui bientôt se détachera de la surface du corps et formera un tourbillon sans noyau, *a coreless vortex*, flottant au sein du liquide, dans le voisinage de la boule. En d'autres termes, tout le liquide sera encore animé d'un mouvement doué de potentiel, mais avec une constante cyclique autour du tourbillon vide. Sir W. Thomson a eu pour but d'éviter l'introduction de la surface de discontinuité, dont la production, dit-il, est « impossible soit dans les fluides parfaits, soit dans les fluides réels, par une action naturelle quelconque » (p. 83-84). Il me paraît que les difficultés sont de même ordre pour la surface libre avec mouvement cyclique, et pour la surface de discontinuité. D'ailleurs, dans un vase très grand *entièrement plein de liquide incompressible*, la conception du tourbillon sans noyau liquide est impossible; la seule chose possible, c'est la production du mouvement cyclique autour d'un noyau liquide, dont les vitesses intérieures ont un potentiel simple, et la surface de séparation du noyau et du liquide extérieur est une surface de discontinuité. Ainsi réduite, la nouvelle conception de Sir W. Thomson conserverait encore tout son intérêt si le mouvement permanent correspondant était stable.

(2) La trompe à eau de Bunsen, l'injecteur Giffard utilisent cette propriété.

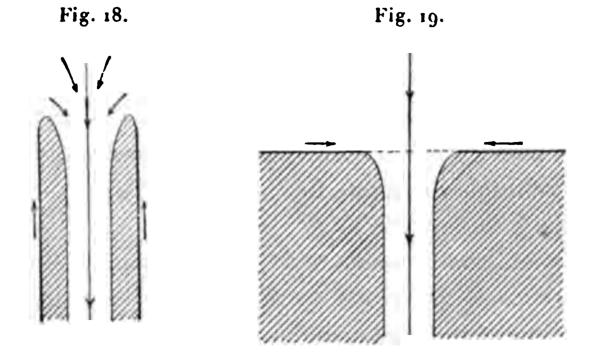
n'ont plus aucun rapport avec celles de l'Exemple II, on n'a conservé que les conditions intérieures au tube.

Si le mouvement a lieu en sens inverse, du vase dans le tube, la solution particulière que propose Helmholtz (*fig.* 18),

$$x + yi = \mathrm{A}\left[a(\Phi + \Psi i) + e^{a(\Phi+\Psi i)} + \sqrt{2e^{a(\Phi+\Psi i)} - e^{2a(\Phi+\Psi i)}}\right.$$
$$\left. - 2\log\left(-\frac{e^{\sqrt{\Phi+i\Psi}}}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{\varepsilon^{2\sqrt{\Phi+i\Psi}}}{2} + 1}\right)\right],$$

conserve les conditions de l'Exemple II à grande distance hors du tube, mais non

Fig. 18. Fig. 19.

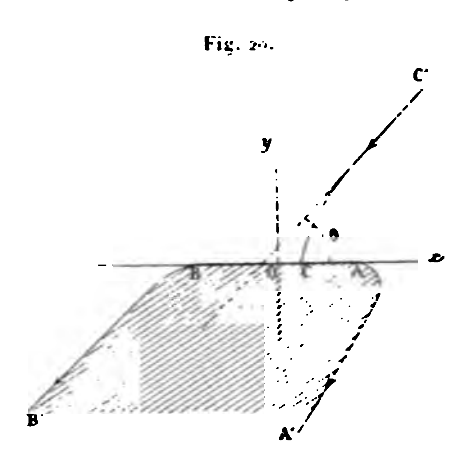


dans le tube : la moitié seulement de celui-ci est occupée par le liquide en mouvement $\left(x^2 < \frac{\mathrm{A}^2\pi^2}{4}\right)$, et il reste deux bandes $\left(\frac{\mathrm{A}^2\pi^2}{4} < x^2 < \mathrm{A}^2\pi^2\right)$, indéfinies du côté des y positifs, c'est-à-dire à l'intérieur du tube, où le liquide est entièrement en repos.

Les mêmes critiques s'appliquent à tous les exemples de Kirchhoff, quelque intéressants qu'ils soient. La forme de la surface de discontinuité qu'ils donnent est indépendante de la vitesse; les conditions à grande distance n'ont aucun rapport avec la réalité. Les exemples les plus curieux de Kirchhoff sont relatifs à l'effet de lames minces exposées sous un angle quelconque à l'action d'un courant uniforme indéfini : les surfaces de discontinuité qu'il obtient vont, en s'écartant indéfiniment, en arrière de l'obstacle (*fig.* 20), qui est suivi d'une masse indéfinie de liquide en repos; à très grande distance, l'influence de l'obstacle, bien loin d'avoir disparu, est devenue extrêmement grande. Prenons pour direction générale du courant celle des y décroissants : pour y positif très grand, le courant est sensiblement uniforme, la vitesse constante en grandeur et en direction. Pour y négatif et très grand au delà de l'obstacle, et pour toutes les valeurs de x inférieures en valeur absolue à une certaine grandeur qui croît indéfiniment avec y, la vitesse du courant est nulle : c'est seulement pour les valeurs de x plus

grandes que cette limite que la vitesse du courant devient sensiblement uniforme en grandeur et en direction. De même, le jet cylindrique formé à travers une

Fig. 20.



ouverture en mince paroi (*fig.* 19) correspond à des conditions à grande distance, très différentes de celles de l'exemple I.

33. Il me paraît maintenant nécessaire de préciser l'énoncé du problème général tel que je le comprends et de faire ressortir quelques caractères de la solution que les exemples particuliers d'Helmholtz et de Kirchhoff ne mettent pas en évidence.

On donne la forme et la position des solides immergés dans un liquide indéfini : on donne en outre les vitesses normales du liquide en tous les points d'une surface géométrique Σ qui entoure tous les corps solides : ce seront par exemple les vitesses à une très grande distance ; enfin on connaît les constantes cycliques relatives à l'espace multiple limité par les solides et la surface Σ; on demande de trouver le mouvement du liquide qui donne des pressions partout positives.

Examinons le cas des mouvements permanents *plans* d'un liquide qui n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure et prenons pour fonction inconnue non pas le potentiel des vitesses, mais le courant ψ qui lui est orthogonal ; les vitesses sont $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $-\frac{\partial\psi}{\partial x}$, et lorsqu'il y a un potentiel des vitesses, ψ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0.$$

ψ est constant le long de chaque paroi, et est déterminé à une constante près sur la surface limite par la valeur de la vitesse normale. Supposons enfin que toutes les constantes cycliques sont nulles.

Dans ces conditions, il y a une solution déterminée unique ψ_1 qui satisfait à

toutes les conditions aux parois et est continue, ainsi que ses dérivées premières, dans tout l'intérieur de la surface Σ. Cette solution devient $I\psi_1$ lorsque les vitesses normales à la surface Σ sont partout multipliées par la constante I que j'appellerai le débit. En même temps, $I\psi_1$ prend sur les parois des corps A, B, ... les valeurs constantes Ia_1, Ib_1, ... Pour achever de déterminer le problème, il faut ajouter une condition relative à la pression en un point particulier. Par la construction même de l'appareil dans lequel se fait l'écoulement du liquide et les conditions dans lesquelles on l'emploie, on peut généralement trouver un point où la pression a une valeur indépendante de I, ou, plus généralement, en est une fonction connue; je m'occuperai d'abord du cas où la valeur de p_0 qui en résulte est indépendante de I : on a alors

$$p = p_0 - \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right].$$

La solution $I\psi_1$ ne convient plus quand la plus grande vitesse devient égale ou supérieure à $\sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}$. Une surface de discontinuité S, à déterminer, apparaît alors le long de la paroi A, par exemple. La solution complète est $I\psi_1 + \psi_2$, ψ_2 étant une fonction continue dont la dérivée normale à la surface S est discontinue. Il est facile de déterminer les conditions limites auxquelles la fonction ψ_2 est astreinte. Elle est constante sur chacune des parois, et aussi sur toute la surface limite Σ, puisque la condition relative à la vitesse normale à Σ est satisfaite par $I\psi_1$. Quant aux conditions relatives à la surface de discontinuité S, à cause de l'état permanent, la vitesse du liquide normale à cette surface est nulle; l'espace compris entre A et S est limité par une surface de forme permanente en tous les points de laquelle la vitesse normale est nulle : il est tout entier en repos; dans tout cet espace et jusqu'à la surface S, on a donc

$$(1) \qquad I\psi_1 + \psi_2 = Ia_1 + a_2.$$

La conservation de la pression à travers la surface S exige alors que, en dehors de la surface S, la vitesse soit constante le long de cette surface; il faut que la pression dans le liquide en repos ne soit pas négative, ce qui donne

$$I\frac{\partial\psi_1}{\partial n} + \frac{\partial\psi_2}{\partial n} \geqq \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}},$$

et, si l'on arrive au débit I par un accroissement progressif et sans diminution, il paraît probable que la condition véritable est

$$(2) \qquad I\frac{\partial\psi_1}{\partial n} + \frac{\partial\psi_2}{\partial n} = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}.$$

En résumé, ψ_2 est continu, ainsi que ses dérivées, et satisfait à l'équation

$$\Delta_2 \psi_2 = 0,$$

dans tout l'espace compris à l'intérieur d'une surface dont une partie (parois fixes, surface Σ) est déterminée, et dont le reste (surface de discontinuité) a une forme inconnue. Examinons d'abord le cas particulier où tous les corps A, B, ... s'étendent jusqu'à l'infini. Leur surface est alors la continuation de la surface Σ, et l'on peut prendre zéro pour la valeur commune de ψ_2 sur toute la partie connue de la surface limite; sur la partie inconnue, ψ_2 et $\frac{\partial \psi_2}{\partial n}$ ont des valeurs déterminées par la position de cette partie inconnue :

$$(1) \qquad \psi_2 = \mathrm{I}(a_1 - \psi_1)$$

$$(2) \qquad \frac{\partial \psi_2}{\partial n} = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}} - \mathrm{I}\frac{\partial \psi_1}{\partial n}.$$

Ces conditions déterminent probablement sans ambiguïté à la fois ψ_2 et la forme de la surface de discontinuité.

Ces équations révèlent une très importante propriété du mouvement discontinu : *La forme de la surface de discontinuité varie, en général, avec le débit* I, *ainsi que la distribution du courant définie par* ψ_2.

En effet, si la surface de discontinuité était invariable, la condition (1) déterminerait complètement, dans tout l'espace, la valeur de ψ_2 qui contiendrait I en facteur, et cela est incompatible avec la seconde condition (2), à cause du terme $\sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}$ indépendant de I. Il en serait de même quelle que soit la loi de variation de p_0 en fonction de I, sauf dans le cas particulier où p_0 serait proportionnel à I^2.

Dans tous les problèmes usuels où p_0 reste peu différente de la pression atmosphérique, quel que soit le débit, la surface de discontinuité dépend du débit.

Cette propriété subsiste évidemment dans le cas général où les corps A, B, ... sont isolés au milieu du fluide.

34. Il est facile d'établir quelques propriétés générales de la surface de discontinuité et de la fonction complémentaire ψ_2.

1° Pour que la surface de discontinuité puisse s'étendre jusqu'à la surface limite Σ, il faut que le débit I ait une valeur I_1, telle que la vitesse $\sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}$ soit atteinte en certains points, ou dans certaines régions de Σ. Quand le débit est inférieur à I_1 la surface de discontinuité se termine soit par la rencontre d'une paroi, soit par la réunion de deux nappes provenant de la subdivision de la même ligne de courant (*fig.* 21). La ligne de courant se continue au delà du point de réunion, mais avec

une vitesse décroissante. Ce point de rencontre où la vitesse a une valeur finie et une direction déterminée est nécessairement un point de rebroussement de la courbe qui limite la région où le liquide est en repos. Il en résulte que cette courbe aura le plus souvent un ou deux points d'inflexion; c'est ce qui arriverait

Fig. 21.

dans tous les exemples de Kirchhoff et d'Helmholtz, si l'on voulait conserver les conditions à grande distance du mouvement à vitesse continue ([1]).

2° Examinons le cas où le potentiel des vitesses φ_1 du mouvement continu et celui du mouvement total $\varphi = I\varphi_1 + \varphi_2$ ont chacun une valeur unique partout où le liquide est en mouvement (n° 33); le potentiel φ_2 jouit de la même propriété.

La *circulation* suivant une ligne fermée quelconque qui ne coupe pas la surface de discontinuité est donc nulle (n° 2), et l'on a

$$(1) \qquad \int \frac{\partial \psi_2}{\partial n} ds = 0;$$

ds est un élément d'arc d'une pareille ligne, et $\frac{\partial \psi_2}{\partial n}$ la dérivée de ψ_2 dans une direction normale à l'arc.

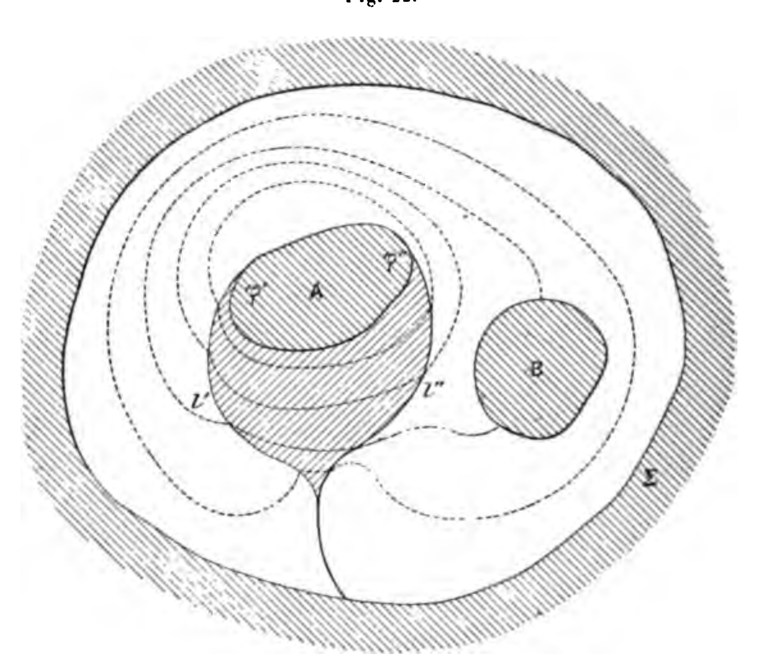
Supposons qu'il n'y ait qu'une surface de discontinuité émanant du corps A. ψ_2 *atteint sa plus grande ou sa plus petite valeur sur le corps* A, *et sur la surface limite* Σ.

Considérons une quelconque des lignes de courant ψ_2 qui entourent une seule région où ψ_2 est maximum ou minimum, sans couper la surface de discontinuité. Le signe de $\frac{\partial \psi_2}{\partial n}$ est constant sur toute l'étendue de cette ligne, et, pour que l'inté-

([1]) J'examinerai prochainement dans ces *Annales* les difficultés d'intégration qui proviennent de cette circonstance.

grale (1) soit nulle, il faut que tous ses éléments soient nuls. ψ_2 est alors constant jusqu'à la surface de discontinuité; a_2 est la plus grande ou la plus petite valeur de ψ_2. De même, au delà de la ligne de courant qui est tangente à la ligne de discontinuité, ψ_2 est constant jusqu'à la surface limite Σ. La disposition correspondante des lignes ψ_2 est représentée dans la *fig.* 22 : une portion de ligne se détache de

Fig. 22.



la ligne Σ et vient se raccorder à la ligne de discontinuité en son point de rebroussement.

3° La vitesse est discontinue sur la ligne S. Appelons θ_e, θ_i les angles de la normale à S avec les normales aux nappes extérieure et intérieure d'une ligne ψ_2; on trouve facilement les relations suivantes :

$$\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial n}\right)_e \sin\theta_e = \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial n}\right)_i \sin\theta_i, \qquad \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial n}\right)_e \cos\theta_e - \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial n}\right)_i \cos\theta_i = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}.$$

Envisageons le cas où deux nappes de la ligne S se raccordent : soient φ'_2, φ''_2 les valeurs du potentiel des vitesses aux points où S se détache de A, et K la période du potentiel à la surface du corps A; enfin soient l', l'' les longueurs des deux nappes de S comptées depuis leur origine jusqu'au point de rebroussement.

La circulation est nulle sur un circuit qui entoure la ligne S et le corps A extérieurement; il en est de même pour un circuit intérieur à la région en repos, ce

qui donne

$$\int_s \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial n}\right)_e \cos\theta_e\, ds - \varphi'_2 + \varphi''_2 = 0, \qquad \int_s \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial n}\right)_i \cos\theta_i\, ds - \varphi''_2 + \varphi'_2 + \mathrm{K} = 0,$$

et par différence, en effectuant les intégrations,

$$(l'' - l')\sqrt{\frac{2p_0}{\rho}} - \mathrm{K} = 0.$$

De même, pour le potentiel total, un circuit extérieur donne

$$(l'' - l')\sqrt{\frac{2p_0}{\rho}} - (\mathrm{I}\varphi'_1 + \varphi'_2) + (\mathrm{I}\varphi''_1 + \varphi''_2) = 0.$$

Toutes ces propriétés sont faciles à généraliser dans le cas du mouvement à trois variables.

35. Revenons aux exemples de Kirchhoff. Le mouvement plan d'un liquide peut être représenté au moyen de deux systèmes de courbes orthogonales, les lignes d'égal potentiel φ et les lignes de courant ψ. La condition d'incompressibilité et celle de l'existence d'un potentiel φ sont satisfaites, si les variables complexes $w = \varphi + i\psi$, $z = x + yi$ sont fonction l'une de l'autre. Alors, à chaque point du plan w correspond un point du plan z. Les parois des solides, dans le plan z, correspondent, dans le plan w, à des portions de lignes le long desquelles ψ est constant.

Dans le mouvement permanent les lignes de discontinuité sont aussi des portions de lignes le long desquelles non seulement ψ est constant comme pour les parois, mais la vitesse aussi est constante.

Formons

$$\frac{\partial(x + yi)}{\partial(\varphi + i\psi)} = \frac{\partial z}{\partial w};$$

c'est une nouvelle quantité complexe $\zeta = \xi + \eta i$; on reconnaît facilement que le rayon vecteur qu'elle représente a pour chaque système de valeurs de φ, ψ ou de x, y la même direction que la vitesse, et est inversement proportionnel à celle-ci. La ligne qui correspond à la ligne de discontinuité est un arc de circonférence, de rayon $\sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}$, dont le centre est à l'origine.

Dans le cas où les parois fixes sont rectilignes, comme la vitesse leur est tangente, les lignes correspondantes dans le plan ζ sont des portions de droites passant par l'origine et parallèles aux parois; ces droites s'étendent jusqu'à l'infini si la vitesse devient nulle en un point de la paroi; elles s'approchent jusqu'à la

circonférence de rayon $\sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}$, si la vitesse atteint la valeur maximum compatible avec la pression p_0, mais ne dépassent point cette circonférence. Ce sont ces remarques qui ont permis à Kirchhoff d'indiquer une méthode générale pour obtenir les surfaces de discontinuité qui prennent naissance en présence de parois planes. La méthode permet aussi de former d'autres exemples particuliers dans lesquels les parois ne sont pas planes, en se donnant arbitrairement dans le plan ζ les lignes qui représentent la vitesse le long des parois de forme inconnue, que l'achèvement de l'intégration déterminera.

Les vitesses en tous les points du liquide en mouvement sont représentées dans le plan ζ par les points intérieurs à un certain contour, fermé ou étendu jusqu'à l'infini; ces points ont leurs correspondants dans le plan w, à l'intérieur d'une bande soit limitée, soit indéfinie, parallèle à l'axe des φ, et les contours se correspondent.

Le problème de trouver l'expression analytique de ζ en fonction de w, de telle sorte que les contours se correspondent, est le problème de la *représentation conforme* (avec conservation des angles) de l'aire enfermée dans l'un des contours, sur l'aire enfermée dans l'autre. Lorsqu'à un point de l'une des aires doit correspondre un point et un seul de l'autre, le problème est entièrement déterminé pourvu qu'on se donne en outre trois valeurs particulières correspondantes sur les deux contours (DARBOUX, *Surfaces*, Livre II, Ch. IV, p. 172).

Si l'on réussit à former cette fonction

$$\zeta = \frac{\partial z}{\partial w} = f(w),$$

une quadrature donne z en fonction de w qui, mise sous forme réelle, fournit les deux équations nécessaires pour déterminer φ et ψ en x, y.

Dans le cas des parois courbes, on obtiendra la forme de celles-ci en substituant à ψ les valeurs constantes par lesquelles on les a représentées dans le plan w, entre les limites convenables de φ. Kirchhoff a indiqué quelques exemples de ce genre; je ne m'y arrêterai pas: je me bornerai à exposer les résultats relatifs aux parois planes.

36. Rappelons rapidement les transformations qui appliquent des figures de diverses formes tracées dans le plan $z = x + yi$ sur le demi-plan positif $\omega = \alpha + \beta i$, en faisant coïncider le contour avec l'axe α.

I. *Aire comprise entre deux rayons vecteurs, qui font les angles* θ_1, θ_2 *avec l'axe des* x

$$\omega = \alpha + \beta i = z^{\frac{\pi}{\theta_2 - \theta_1}} . e^{-\frac{\pi \theta_1}{\theta_2 - \theta_1}}.$$

Les rayons θ_1, θ_2 s'appliquent respectivement sur la partie positive et la partie négative de l'axe des α; un arc de circonférence de rayon c ayant son centre à l'origine des xy devient une demi-circonférence de rayon $c^{\frac{\pi}{\theta_2-\theta_1}}$ dont le centre est au point $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

II. *Croissant.* — Aire comprise entre deux arcs de cercle qui se coupent aux points c_1, c_2; les tangentes aux arcs de cercle au point c_1, faisant les angles θ_1, θ_2 avec la direction de la corde $c_2 c_1$.

$$\omega = \left(\frac{z-c_1}{z-c_2}\right)^{\frac{\pi}{\theta_2-\theta_1}} e^{-\frac{\pi\theta_1}{\theta_2-\theta_1}}.$$

Le sommet c_1 vient à l'origine; le point c_2 va à l'infini. L'arc dont la tangente a la direction θ_1 s'applique sur la partie positive de l'axe des α; l'autre sur la partie négative du même axe.

III. L'aire indéfinie comprise entre les deux rayons et la circonférence de rayon c devient par la transformation I un croissant d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de sommets $+c^{\frac{\pi}{\theta_2-\theta_1}}$, $-c^{\frac{\pi}{\theta_2-\theta_1}}$. En lui appliquant la transformation II, on l'applique sur le demi-plan avec le sommet $+c^{\frac{\pi}{\theta_2-\theta_1}}$ à l'origine

$$\omega = \left(\frac{(z)^{\frac{\pi}{\theta_2-\theta_1}} \cdot e^{-\frac{\pi\theta_1}{\theta_2-\theta_1}} - c^{\frac{\pi}{\theta_2-\theta_1}}}{(z)^{\frac{\pi}{\theta_2-\theta_1}} \cdot e^{-\frac{\pi\theta_1}{\theta_2-\theta_1}} + c^{\frac{\pi}{\theta_2-\theta_1}}}\right)^2.$$

IV. La transformation

$$\omega = e^{-\frac{\pi}{b}z}$$

applique la bande comprise entre $y = 0$ et $y = b$, sur le demi-plan; la ligne $y = 0$ est appliquée sur la partie positive de l'axe des α, et la ligne $y = b$ sur la partie négative; l'origine $\alpha = 0$, $\beta = 0$ correspond à $x = -\infty$, une portion de ligne $x = \text{const.}$ devient une demi-circonférence, et toute ligne $y = \text{const.}$ un rayon.

V. La transformation la plus générale qui applique une fois et une seule le demi-plan positif x, y sur le demi-plan positif α, β, avec correspondance de l'axe des x, est

$$\omega = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc > 0.$$

a, b, c, d sont des constantes réelles. Cette transformation établit en même temps

la correspondance entre les deux demi-plans négatifs, le point $x = -\frac{b}{a}$, $y = 0$, vient à l'origine, le point $x = -\frac{d}{c}$, $y = 0$, s'éloigne à l'infini ; enfin le point $\alpha = \frac{a}{c}$, $\beta = 0$, correspond au point ∞.

37. Exposons la méthode de Kirchhoff sur un exemple, celui d'une lame plane soumise à l'action d'un courant uniforme indéfini (*fig.* 20). A l'infini de tous les côtés, $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ a la même valeur $\sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}$, celle relative à la discontinuité. Dans le plan w, cela donne une ligne double, de courant $\Psi = 0$, qui s'étend indéfini-

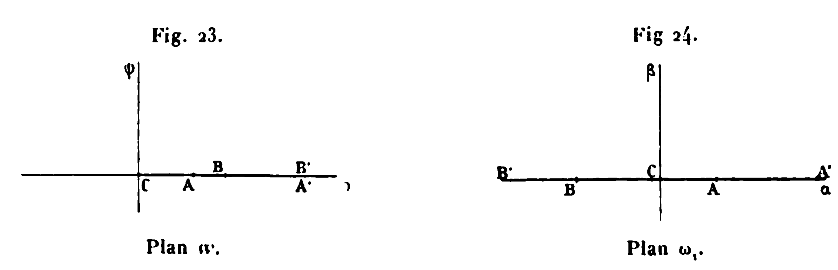


Fig. 23. Plan w. Fig 24. Plan ω_1.

ment à partir de $\Phi = 0$ jusqu'à $\Phi = \infty$ (*fig.* 23). La transformation (I) applique w sur le plan auxiliaire ω_1 (*fig.* 24),

$$\omega_1 = +\sqrt{w}.$$

Dans le plan ζ, la limite est formée par deux portions indéfinies de l'axe des ξ reliées par la demi-circonférence de rayon $\sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}$ qui répond à la surface de discontinuité, et c'est la portion du plan située du côté négatif qui représente ζ

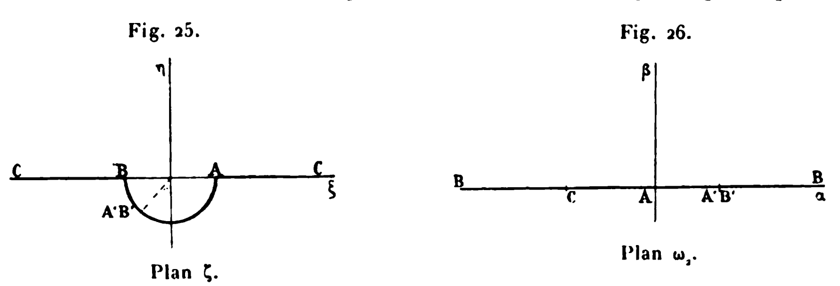


Fig. 25. Plan ζ. Fig. 26. Plan ω_2.

(*fig.* 25). La transformation III applique ζ d'une manière particulière sur le demi-plan ω positif (*fig.* 26),

$$\omega_2 = -\left(\frac{\zeta - \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}}{\zeta + \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}}\right).$$

On fait coïncider les deux représentations sur le plan ω au moyen de la transformation V

$$+\cot^2\frac{\theta}{2}\,\frac{\sqrt{w}-\sqrt{\Phi_0}}{\sqrt{w}+\sqrt{\Phi_1}}=-\left(\frac{\zeta-\sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}}{\zeta+\sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}}\right)^2,$$

en appelant Φ_0, Φ_1 les valeurs de Φ aux deux bords de la lame et θ l'angle positif plus petit que deux droits du plan de la lame avec la direction opposée à celle du courant à grande distance. Enfin, si nous supposons Φ nul au point C où la ligne de courant $\psi=0$ rencontre la lame et se dédouble, comme la vitesse en ce point est nulle, on a

$$+\cot^2\frac{\theta}{2}\sqrt{\Phi_0}=\sqrt{\Phi_1}.$$

Toutes les conditions relatives à la vitesse sont satisfaites et ne laissent arbitraire que l'une des deux quantités Φ_0, Φ_1. Après l'intégration, celle-ci sera déterminée par la largeur de la lame. Résolvons l'équation par rapport à ζ

$$\zeta=\left[-\cos\theta+2\sin^2\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{\Phi_1}{w}}+\sqrt{\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{\Phi_1}{w}}-\cos\theta\right)^2-1}\,\right]\sqrt{\frac{\rho}{2p_0}},$$

et intégrons

$$z-c=\int\zeta\,dw=\sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}\left\{\begin{aligned}&-w\cos\theta+4\sin^2\frac{\theta}{2}\sqrt{\Phi_1 w}\\&+\left(\sqrt{w}+\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta}{\sin^2\theta}\sqrt{\Phi_1}\right)\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\sqrt{\Phi_1}-\cos^2\frac{\theta}{2}\sqrt{w}\right)(\sqrt{\Phi_1}+\sqrt{w})}\\&+\frac{4\sin^4\frac{\theta}{2}}{\sin^3\theta}\Phi_1\arcsin\left(\frac{\sin^2\theta}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\sqrt{\frac{w}{\Phi_1}}+\cos\theta\right).\end{aligned}\right\}$$

On peut choisir c de telle sorte que l'origine soit au point de la plaque où la vitesse est nulle

$$c=\frac{4\sin^4\frac{\theta}{2}\Phi_1}{\sin^2\theta}\left(\cos\theta-\frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\sin\theta}\right)\sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}.$$

De plus, on peut trouver facilement les valeurs de z qui correspondent aux deux bords de la lame. Elles sont données par

$$\sqrt{w}=\tan^2\frac{\theta}{2}\sqrt{\Phi_1}=\sqrt{\Phi_0},\qquad \sqrt{w}=-\sqrt{\Phi_1}.$$

On obtient ainsi

$$x_0 = \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}\,\Phi_1\left(-\cos\theta\,\mathrm{tang}^4\frac{\theta}{2} + 4\sin^2\frac{\theta}{2}\,\mathrm{tang}^2\frac{\theta}{2} + 2\pi\frac{\sin^4\frac{\theta}{2}}{\sin^3\theta}\right),$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}\,\Phi_1\left(-\cos\theta - 4\sin^2\frac{\theta}{2} - 2\pi\frac{\sin^4\frac{\theta}{2}}{\sin^3\theta}\right),$$

et, par suite, la largeur de la lame est

$$x_0 - x_1 = l = \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}\,\Phi_1\,\frac{4+\pi\sin\theta}{4\cos^4\frac{\theta}{4}}.$$

On a donc

$$\Phi_1 = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}\,\frac{4\cos^4\frac{\theta}{2}}{4+\pi\sin\theta}\,l.$$

La solution est maintenant complète. Kirchhoff n'a traité cet exemple que dans son premier Mémoire; dans son Livre il s'est borné au cas de l'incidence normale. Les formules qu'il a données ne diffèrent de celles-ci que par le choix des unités que j'ai laissées arbitraires (¹).

38. Pour avoir la forme de la surface de discontinuité, il faut faire dans l'expression générale de z

$$\Psi = 0, \quad \text{avec} \quad \Phi > 0, \quad \text{et} \quad \sqrt{\Phi} > \sqrt{\Phi_1}\,\mathrm{tang}^2\frac{\theta}{2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\Phi} < -\sqrt{\Phi_1}.$$

On trouve facilement

$$(1)\quad z - c = \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}\left\{\begin{array}{l} -\Phi\cos\theta + 4\sin^2\frac{\theta}{2}\sqrt{\Phi_1\Phi} + \dfrac{2\pi\sin^4\frac{\theta}{2}}{\sin^3\theta}\Phi_1 \\ + i\left\{\begin{array}{l} \dfrac{4\sin^4\frac{\theta}{2}}{\sin^3\theta}\Phi_1\log\left[2\cos^2\frac{\theta}{2}\sqrt{\dfrac{\Phi}{\Phi_1}} + \cos\theta\right. \\ \qquad\left. + \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\sqrt{\dfrac{\Phi}{\Phi_1}} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\sqrt{\dfrac{\Phi}{\Phi_1}} + 1\right)}\right] \\ + \left(\sqrt{\Phi} + \dfrac{2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta}{\sin^2\theta}\sqrt{\Phi_1}\right)\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\sqrt{\Phi} - \sin^2\frac{\theta}{2}\sqrt{\Phi_1}\right)\left(\sqrt{\Phi} + \sqrt{\Phi_1}\right)} \end{array}\right\} \end{array}\right\},$$

(¹) On retrouve les formules de Kirchhoff en posant $\sqrt{\frac{2p_0}{\rho}} = 1$, $\sqrt{\Phi_1} = \frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$. Cela équivaut à prendre pour unité de longueur $\frac{l\sin^4\theta}{4+\pi\sin\theta}$ et pour unité de temps $\frac{l\sin^4\theta}{4+\pi\sin\theta}\sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}$.

où x et y sont séparés. Pour la même valeur de Φ, on obtient les deux valeurs de x, y, qui correspondent aux deux nappes en prenant $\pm\sqrt{\Phi}$. Cela donne en particulier

$$\delta x = \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}\cdot 8\sin^2\frac{\theta}{2}\sqrt{\Phi_1\Phi}.$$

Cette différence croît constamment avec Φ : les deux nappes de la surface de discontinuité s'éloignent donc indéfiniment l'une de l'autre.

On aura la forme de la ligne de courant $\Psi = 0$ avant sa rencontre avec la lame, en faisant $\Phi < 0$.

Enfin, on aura la vitesse aux différents points de la paroi en faisant

$$\Psi = 0, \qquad \Phi > 0, \qquad -\sqrt{\Phi_1} < \sqrt{\Phi} < \tang^2\frac{\theta}{2}\sqrt{\Phi_1}.$$

L'expression de ζ est réelle et l'on a

$$\xi = \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}\left[-\cos\theta + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{\Phi_1}{\Phi}} + \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\sqrt{\Phi_1} - \cos^2\frac{\theta}{2}\sqrt{\Phi}\right)(\sqrt{\Phi_1}+\sqrt{\Phi})}\right].$$

La pression en un point x, Φ de la lame est

$$p = p_0 - \frac{\rho}{2\xi^2} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{2p_0}{\rho} - \frac{1}{\xi^2}\right),$$

et la pression totale

$$P = \int_{x_1}^{x_0}\frac{\rho}{2}\left(\frac{2p_0}{\rho} - \frac{1}{\xi^2}\right)dx.$$

Mais le long de la paroi, la relation

$$\zeta = \frac{dz}{dw}$$

se réduit à

$$\xi = \frac{dx}{d\Phi};$$

on a ainsi, grâce à cette remarque de Kirchhoff,

$$P = \int\frac{\rho}{2}\left(\frac{2p_0}{\rho}\xi - \frac{1}{\xi}\right)d\Phi = \int\sqrt{2\rho p_0}.\sqrt{\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\sqrt{\frac{\Phi_1}{\Phi}} - \cos\theta\right)^2 - 1}\,d\Phi,$$

et il faut faire l'intégration entre les limites $-\sqrt{\Phi_1}$ et $+\sqrt{\Phi_1}\tang^2\frac{\theta}{2}$ pour $\sqrt{\Phi}$. Cette intégration a été effectuée dans la recherche de z :

$$P = \sqrt{2\rho p_0}\,\Phi_1\frac{4\pi\sin^4\frac{\theta}{2}}{\sin^2\theta} = p_0\frac{\pi\sin\theta}{4+\pi\sin\theta}\,l.$$

Sur la seconde face, la pression est nulle, comme sur la surface de discontinuité; P représente donc la pression qu'exerce le liquide en mouvement sur la lame plane, lorsque la surface de discontinuité a la forme (1).

Lord Rayleigh, qui a le premier donné la valeur de cette pression (1876), a aussi déterminé son moment par rapport au point où la vitesse est nulle. Il en a déduit pour le bras de levier de la pression P par rapport au milieu de la lame

$$D = \frac{3}{4}\,\frac{\cos\theta}{4+\pi\sin\theta}\,l.$$

Le point d'application remonte à mesure que la lame s'éloigne de la position normale au courant.

39. La loi de l'obliquité trouvée ainsi par lord Rayleigh est très différente de celle du carré du sinus de l'angle θ, adoptée par les ingénieurs avec plus ou moins de confiance sous l'autorité de Newton et d'Euler, et souvent employée comme une loi applicable à un élément de surface pris dans une surface courbe quelconque.

Rien n'autorise à admettre même l'existence d'une loi élémentaire de pression d'un courant uniforme qui permette de calculer la grandeur et le point d'application de la pression résultante pour une surface courbe au moyen d'une quadrature, sans qu'il soit nécessaire d'intégrer les équations générales de l'Hydrodynamique. C'est le contraire qui est évident : sur une lame plane, une seule ligne de courant vient jusqu'au contact de la lame, s'y sépare en deux : au point de rencontre la vitesse est nécessairement nulle; elle croît depuis ce point jusqu'aux bords, et par conséquent la pression maximum au centre diminue en approchant des bords : sur les divers éléments d'une même lame plane la pression n'est pas uniforme. La pression en un point d'une surface courbe exposée à l'action d'un courant uniforme indéfini ne dépend donc pas seulement de la direction de la normale en ce point, mais de la forme de toute la surface et de la position du point sur cette surface.

Puisqu'il en est ainsi, on peut dire que la formule de Rayleigh fournit le premier et le seul résultat complet qu'on puisse regarder comme une conséquence des principes de l'Hydrodynamique pour un corps immergé dans un courant liquide indéfini. Le Tableau suivant du Mémoire de Lord Rayleigh donne la comparaison des résultats des expériences de Vince (*Ph. Trans.*, 1798) et de ceux que donneraient diverses formules d'obliquité. La dernière colonne indique la distance calculée du bord supérieur au point où la vitesse est nulle.

θ.	$\sin^2\theta$.	Exp.	$P_\theta : P_{90}$.	$D_\theta : l$.	$(x_0 - c) : l$.
90.............	1,0000	1,000	1,0000	0,0000	0,5000
70.............	0,8830	0,974	0,9652	0,0369	0,2676
50.............	0,5868	0,873	0,8537	0,0752	0,0981
30.............	0,2500	0,613	0,6411	0,1166	0,0173
20.............	0,1170	0,458	0,4814	0,1389	0,0040
10.............	0,0302	0,778	0,2728	0,1625	0,0004

L'avantage appartient nettement à la formule de Rayleigh, quatrième colonne, et il est permis de penser qu'il serait plus décisif encore, si la vitesse avait approché davantage de la limite, ou si l'on réussissait à faire la théorie pour des vitesses inférieures à la vitesse limite.

Les déplacements du point d'application de la résultante en fonction de l'obliquité ont aussi été étudiés par lord Rayleigh : ce point s'éloigne du milieu quand l'obliquité croît; mais il ne va pas jusqu'au bord, l'écart maximum, correspondant à $\alpha = 0$, c'est-à-dire à la lame parallèle au courant, est $\frac{3l}{16}$. Ce résultat est facile à contrôler par des expériences fort simples : une lame verticale, qui peut glisser horizontalement entre deux coulisses fixées à un axe vertical, est plongée dans un courant horizontal indéfini. Quand l'axe passe par le milieu de la lame, la position stable de celle-ci est normale au courant. On fait glisser la lame, de manière à éloigner peu à peu l'axe du milieu; la lame tourne autour de l'axe et prend une orientation oblique. Bien avant que l'axe ait atteint le bord de la lame, celle-ci se place parallèlement au courant; on ne fait qu'augmenter la stabilité de cette position quand on approche de plus en plus l'axe du bord de la lame.

40. Les autres cas traités par Kirchhoff conduisent aux résultats suivants :

1° Écoulement par une fente en mince paroi plane a de largeur l

$$z = \frac{l}{2+\pi}\left(1 - e^{-aw} + \sqrt{e^{-2aw} - 1} + \text{arc tang}\sqrt{e^{-2aw} - 1}\right),$$

en posant

$$a = \frac{2+\pi}{l}\sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}.$$

Il se forme un jet (*fig.* 19) dont la largeur à grande distance de l'ouverture est $\frac{\pi}{2+\pi} l$; la contraction de la veine plane est environ 0,61; le débit par seconde est $\frac{\pi}{2+\pi} l \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}$.

2° Écoulement à l'intérieur d'un tube plat vertical de largeur l (Ex. d'Helmholtz)

$$z = -i\frac{l}{2\pi}\left[e^{-2bw} + bw - 1 + e^{-bw}\sqrt{e^{-2bw}-1} - \log\left(e^{-bw} + \sqrt{e^{-2bw}-1}\right)\right] \quad (^1),$$

en posant

$$b = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}.$$

Il se forme un jet à l'intérieur du tube, dont la largeur à grande distance est seulement $\frac{l}{2}$. Le débit est égal à $l\sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}$.

Les parties ombrées représentent le liquide en repos.

41. *Instabilité des jets; flammes sensibles; flammes chantantes.* — Les mouvements discontinus étudiés par Helmholtz et Kirchhoff sont des mouvements permanents possibles des liquides; avant de pouvoir affirmer que ce sont bien les mouvements limites correspondant aux mouvements réels des fluides naturels, qui prennent naissance spontanément et se maintiennent, il faut étudier la stabilité de ces mouvements. Au point de vue expérimental, tous les jets subissent assez fortement l'influence des moindres mouvements périodiques, comme le montrent les expériences connues de Savart sur les jets d'eau, de Tyndall (*Son,* 6e Leçon) sur les flammes sensibles et les jets de gaz. Chaque jet a un maximum de sensibilité pour une certaine hauteur de son variable avec la pression d'écoulement. On peut même rendre la flamme tellement sensible à un son de hauteur déterminée, que, brûlant dans un tuyau accordé sur ce son, elle fasse parler ce tuyau spontanément et devienne une flamme chantante. De même dans les tuyaux d'orgue, on peut donner à la lame d'air qui sort par la fente d'une embouchure de flûte son maximum de sensibilité pour le son du tuyau en réglant la distance du biseau à la fente; la production des harmoniques successifs du même tuyau en forçant le vent montre bien l'influence de la vitesse d'écoulement.

Dans le mouvement limite adopté par Helmholtz, ce caractère se retrouve exagéré; la forme de la surface de discontinuité paraît être toujours instable, et d'autant plus instable que la longueur d'onde de la perturbation est moindre. Lord Rayleigh a étudié cette question dans deux Mémoires (1878) dont je vais faire connaître les principaux résultats.

Occupons-nous seulement des mouvements plans dans lesquels il y a une ligne de discontinuité, et conservons les notations des numéros précédents. Appelons, en outre, s l'arc de la ligne de discontinuité compté depuis le point où elle se sé-

---

(1) Cette équation permettra au lecteur de corriger facilement l'équation correspondante de la page 51, transcrite inexactement.

pare de la paroi, et supposons le potentiel nul en ce point. En un point de la ligne le potentiel a pour valeur Vs du côté où le liquide se meut avec la vitesse limite V, et zéro de l'autre côté. Une petite déformation simple, dont l'ordonnée n normale à la ligne de discontinuité est la partie réelle de $He^{ips+\alpha t}$, correspond à des accroissements de potentiel qui, dans le voisinage immédiat de cette ligne, se réduisent à la partie réelle de $\Phi_1 = A_1 e^{ips+pn+\alpha t}$ et de $\Phi_2 = A_2 e^{ips-pn+\alpha t}$; A_1 et A_2 sont des constantes imaginaires. Cette forme satisfait à la condition d'incompressibilité, $\Delta_2\varphi = 0$, dans le voisinage de la ligne de discontinuité. On aurait la forme générale en remplaçant s et n par ΦV^{-1} et ΨV^{-1}, Φ et Ψ ayant les valeurs relatives à l'état permanent.

1° La ligne de discontinuité se meut avec le liquide

$$\frac{D}{Dt}(n - He^{ips+\alpha t}) = 0.$$

Les termes du premier ordre satisfont à cette relation en posant

$$A_1 = -H\left(\frac{\alpha}{p} + iV\right), \qquad A_2 = +H\frac{\alpha}{p}.$$

2° La pression est à chaque instant la même de part et d'autre; en tenant compte de l'égalité de pression dans l'état permanent, il reste

$$\frac{1}{2}V^2 - \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} - \frac{1}{2}\left[\left(V + \frac{\partial\Phi_1}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\right)^2\right] = -\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}\right)^2\right]$$

et, au premier ordre,

$$\left(\frac{\alpha}{p} + iV\right)^2 = -\left(\frac{\alpha}{p}\right)^2$$

ou

$$\alpha = \frac{pV}{2}(\pm 1 - i).$$

Une solution simple de longueur d'onde $\frac{2\pi}{p}$ est donc de la forme

$$n = \left(He^{+\frac{pVt}{2}} + H'e^{-\frac{pVt}{2}}\right)\cos p\left(s - \frac{Vt}{2}\right) + \left(Ge^{+\frac{pVt}{2}} + G'e^{-\frac{pVt}{2}}\right)\sin p\left(s - \frac{Vt}{2}\right).$$

Les constantes H, H', G, G' dépendent de l'état initial et de la forme des parois; l'oscillation se propage avec la vitesse $\frac{V}{2}$ et croît en même temps. L'amplitude devient environ vingt-trois fois plus grande pendant le temps de parcours d'une longueur d'onde; c'est un mouvement d'autant plus instable que la longueur d'onde est plus petite. Cette solution est complète quand le liquide en mouvement et le

[illegible] s'étendent indéfiniment, l'un du côté des x négatifs, l'autre du côté des x positifs quand, de plus, la ligne de discontinuité est indéfinie.

Mais il faut bien remarquer qu'elle n'est plus satisfaisante près du point de [illegible] de cette ligne à la paroi; là le mouvement ne saurait être symétrique de [illegible] et d'autre, le point de jonction peut seulement osciller le long de la paroi [illegible] la ligne de discontinuité cesse d'être tangente à la paroi; c'est une con[illegible] à laquelle cette solution simple ne satisfait pas; le mouvement oscillatoire [illegible]. La réalité dans ce cas est donc plus compliquée, et l'influence de [illegible] sur la [illegible] est [illegible]. Tous les cas traités par lord Rayleigh se [illegible] à une surface de discontinuité [illegible].

[illegible] par des lignes de courant à distance [illegible] analogue, où la vitesse de propa[illegible]

[illegible] dans le potentiel de [illegible]

[illegible] Les quatre constantes sont déter[illegible] par les circonstances du mouvement [illegible] nouvelle condition initiale. On [illegible] de largeur [illegible] et de vitesse V au milieu [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] symétriques, quand les déformations [illegible] par $\coth \gamma l$. Lorsque [illegible] largeur du [illegible] γl est très [illegible] suivant que les déforma[illegible] mesurée par γV à la même [illegible] de propagation. La déformation est [illegible]

[illegible] impossible l'existence d'une [illegible] des couches glissantes de tourbil[illegible] de tourbillons surpasse-t-elle [illegible] même pour un liquide sans frottement? C'est [illegible] sur quelques exemples de [illegible] satisfait à la condition d'incompressi-

bilité en posant

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \qquad \Psi = f(y) + \mathrm{Y} e^{\alpha t + ipx}.$$

$f(y)$ est une fonction arbitraire de y seule, relative à l'état permanent, et Y une autre fonction de y correspondant à la perturbation de période $\frac{2\pi}{p}$. En éliminant la pression entre les deux équations du mouvement, on obtient une équation unique dont les termes du premier ordre donnent, pour les petites déformations,

$$\left[\frac{\partial^2 \mathrm{Y}}{\partial y^2} - \mathrm{Y}\left(p^2 + \frac{ipf'''}{\alpha + ipf'}\right)\right](\alpha + ipf') = 0.$$

Quand la couche peut être séparée en bandes dans chacune desquelles f'' a une valeur constante, Y est de la forme $\mathrm{A}e^{\pm py}$, et les conditions de continuité de vitesse normale et tangentielle, ainsi que de pression d'une bande à l'autre, donnent des relations homogènes entre les constantes A, qui entraînent une relation entre α, p, les diverses valeurs de f'' et les épaisseurs des bandes.

S'il y a une seule bande d'épaisseur b, d'un côté de laquelle la vitesse est uniforme et égale à V, et de l'autre à $-$V, on a $f'' = \frac{2\mathrm{V}}{b}$. Ce mouvement est instable pour les perturbations de grande longueur d'onde, comme si b était nul; l'instabilité est maximum lorsque la longueur d'onde est égale à $8b$, elle se change en stabilité croissante pour des longueurs d'onde inférieures à $5b$; en même temps les sinuosités des deux surfaces limites de la bande deviennent parallèles.

Les résultats sont un peu différents pour des bandes dans lesquelles la vitesse maximum est au milieu, et qui sont limitées par du liquide en repos. Toutes les déformations symétriques sont stables; les déformations non symétriques sont stables quand la longueur d'onde est petite, instables quand elle est grande. Ces résultats établis par lord Rayleigh, dans quelques cas où la distribution de la vitesse dans la bande est représentée par un polygone convexe, paraissent susceptibles d'extension au cas plus général d'une courbe convexe quelconque.

43. *Discussion de l'hypothèse d'Helmholtz.* — De ces recherches il semble résulter que le mouvement est toujours instable quand il y a une surface de discontinuité; qu'il est stable, au contraire, dans des limites de longueur d'onde fort étendues quand la vitesse est continue, la discontinuité portant seulement sur les rotations élémentaires, c'est-à-dire sur les dérivées de la vitesse, et sous certaines réserves supplémentaires.

Ces résultats, il faut bien l'avouer, ne sont guère favorables à l'hypothèse d'une surface de discontinuité des vitesses, et l'on doit se demander si cette conception de Helmholtz correspond bien à l'état limite d'un fluide à frottement très faible.

Ayant exposé de mon mieux cette hypothèse dans les paragraphes précédents, on me permettra de terminer par quelques réflexions personnelles. Il me semble que, dans cette discussion, on a trop souvent regardé le liquide entièrement dénué de frottement comme ayant une existence propre, et que l'on s'est fort embarrassé de difficultés n'existant que pour ce liquide parfait, dont nous ne connaissons point d'exemple, mais nullement pour les liquides naturels. Le liquide parfait de l'Hydrodynamique est une conception idéale, dont les propriétés rigoureuses donnent souvent, mais pas toujours, une première approximation suffisante du mouvement des liquides réels. En particulier, nous savons que les vitesses tangentielles d'un liquide à la surface d'un corps qu'il mouille restent toujours très petites ou même nulles; ce dernier cas est sensiblement réalisé, d'après les expériences d'Helmholtz et Piotrowski, pour l'éther et l'alcool au contact d'un métal. Si l'un de ces liquides, d'abord en repos, est mis en mouvement et qu'on le traite comme un fluide parfait, il y aura un potentiel des vitesses, et le mouvement correspondant sera très différent du mouvement réel dans le voisinage des parois; la vitesse tangentielle n'y sera pas nulle. Par exemple, dans un tube cylindrique, la vitesse serait uniforme dans toute la section droite. Si l'on traite le problème en tenant compte du frottement, on trouve qu'il se produit une couche de tourbillons près de la paroi. Cette couche n'est pas nécessairement confinée au voisinage immédiat de la paroi, comme on le suppose implicitement en prenant le mouvement à potentiel comme mouvement limite. Un exemple simple est fourni par l'écoulement dans un tube circulaire indéfini de rayon a. Pour un liquide visqueux, la vitesse à une distance r de l'axe est donnée, comme on sait, par les relations

$$u = \frac{2I}{\pi a^4}(a^2 - r^2), \qquad v = 0, \qquad w = 0,$$

en appelant I le débit par seconde, quand le liquide reste immobile le long de la paroi. Le coefficient de frottement intervient seulement dans l'expression de la chute de pression par unité de longueur, $\mu\frac{8I}{\pi a^4}$. Quand le coefficient μ tend vers zéro, la chute de pression tend aussi vers zéro, mais la distribution de vitesse reste la même pour le même débit. Elle satisfait à toutes les équations du mouvement permanent d'un liquide parfait.

Dans le cas général, l'état limite correspondant au frottement infiniment petit comportera des rotations non confinées à la surface des solides ou à des surfaces de discontinuité.

44. La nécessité de tenir compte du frottement dans le raisonnement est particulièrement évidente quand il s'agit de l'état permanent. Un état permanent in-

dépendant de l'état initial n'est possible que s'il y a frottement. La période variable dure d'autant plus longtemps que le frottement est plus faible, et l'énergie totale absorbée par le frottement et transformée en chaleur dans le passage de l'état initial à l'état permanent a une valeur finie même pour un frottement interne très faible.

Les équations différentielles du mouvement d'un liquide parfait suffisent donc à rendre compte des mouvements qui se produisent pendant un temps fini dans un liquide à frottement très faible; elles doivent être satisfaites par le mouvement permanent de ce liquide; mais elles sont absolument insuffisantes pour rendre compte du passage d'un état initial quelconque, et en particulier du repos, à un état permanent, quelque faible que soit le frottement intérieur.

Les rotations élémentaires ne subissent en un temps fini que des variations très petites comme le frottement intérieur; mais des variations finies quelconques peuvent se produire dans le passage d'un état initial quelconque à l'état permanent. Les rotations permanentes ont une limite différente de zéro quand le frottement intérieur diminue indéfiniment. C'est toute une étude à refaire et ce n'est pas ici le lieu. Il suffit de remarquer que, dans un fluide naturel, c'est certainement par le jeu du frottement interne que les vitesses se règlent, de manière à ne donner jamais de pression négative, et qu'on peut obtenir le même résultat dans le mouvement limite, grâce à l'existence des rotations. Dans ce cas, en effet, la relation qui détermine la pression est

$$\frac{p}{\rho} + \mathrm{V} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \Pi$$

avec

$$2(v\zeta - w\eta) = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \qquad 2(w\xi - u\zeta) = \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \qquad 2(u\eta - v\xi) = \frac{\partial \Pi}{\partial z},$$

et il peut y avoir une surface le long de laquelle p a sa valeur minimum positive ou nulle, sans discontinuité ni des vitesses, ni des dérivées de la pression.

45. Qu'il s'agisse d'un fluide parfait ou visqueux, il paraît probable que, dans un espace simple, la connaissance des trois composantes de la vitesse en chaque point de la surface limite est nécessaire et suffisante pour déterminer entièrement le mouvement permanent continu. Mais il y a une grande différence entre le liquide parfait et le liquide visqueux; pour ce dernier, la distribution de la vitesse dans chacune des ouvertures de la surface limite n'a d'influence sensible que près de l'ouverture même; loin de la surface limite, le mouvement du fluide visqueux ne dépend que du débit total de chaque ouverture. Rien de pareil pour le fluide

parfait. Ce que j'appelle le *mouvement limite,* ce qu'il est intéressant de connaître, c'est ce que devient le mouvement caractéristique du fluide visqueux quand on y annule le coefficient de frottement. Ce mouvement principal du fluide visqueux est probablement celui dans lequel le travail transformé en chaleur par le frottement est le plus petit qui soit compatible avec des valeurs déterminées du débit de chaque ouverture, et les conditions d'adhérence aux parois; cette condition est indépendante de la grandeur du coefficient de frottement; elle détermine aussi le mouvement limite.

Reprenons l'exemple du tube cylindrique indéfini, le long des parois duquel le liquide est en repos. Avec un fluide parfait, une distribution quelconque de vitesses parallèles aux génératrices, sans vitesses normales, peut se maintenir d'un bout à l'autre du tube. Avec le fluide visqueux, au contraire, une seule distribution de ce genre est uniforme; si l'on en produit une différente en un point quelconque du tube, le jeu naturel des frottements la transformera rapidement. Cette distribution uniforme, rappelée au n° **42**, rend minimum absolu le travail dépensé en frottement pour un débit I, avec une vitesse nulle le long des parois, comme on peut facilement s'en convaincre.

J'arrêterai provisoirement ici cette Revue, sans avoir complètement rempli le programme que je m'étais tracé. Je compte, d'ailleurs, que l'interruption ne sera pas de longue durée; j'ai hâte d'arriver à l'étude du mouvement des solides dans un liquide naturel, et des résistances qu'il y éprouve, la plus difficile peut-être et la plus intéressante de toutes les questions qui se présentent en Hydrodynamique.

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

SUR LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

ET LES

GROUPES ALGÉBRIQUES DE TRANSFORMATIONS,

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. Les analogies entre les équations différentielles linéaires et les équations algébriques ont été depuis longtemps signalées et poursuivies dans des directions différentes. On n'a pas cependant, je crois, cherché comment la théorie célèbre de Galois concernant les équations algébriques pourrait être étendue aux équations différentielles linéaires. En employant une méthode présentant une grande analogie avec celle dont a fait usage l'illustre géomètre, on arrive à une proposition qui correspond, en quelque sorte, au théorème fondamental de Galois, et l'on est ainsi conduit à la notion de ce que j'appellerai le *groupe de transformations linéaires* correspondant à l'équation différentielle. J'emploie cette expression de *groupe de transformations* déjà employée d'une manière générale par M. Sophus Lie dans une série de Mémoires, extrêmement remarquables, que j'aurai plusieurs fois l'occasion de citer, afin de distinguer ce groupe de celui que l'on appelle généralement le *groupe de l'équation linéaire* [1].

---

[1] Les points principaux de ce travail ont été énoncés dans une Note insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* en avril 1883.

Considérons donc une équation différentielle linéaire

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m y = 0, \tag{1}$$

où nous supposerons que les coefficients sont des fonctions rationnelles de la variable x, et soit $y_1, y_2, \ldots, y_m$ un système fondamental d'intégrales.

J'envisage l'expression suivante

$$\begin{aligned} V = {} & A_{1,1} y_1 + A_{1,2} y_2 + \ldots + A_{1,m} y_m \\ & + A_{2,1} \frac{dy_1}{dx} + \ldots + A_{2,m} \frac{dy_m}{dx} + \ldots + A_{m,m} \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}}, \end{aligned}$$

qui est, comme on voit, une expression linéaire et homogène par rapport à $y_1, y_2, \ldots, y_m$ et à leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$.

Les m^2 coefficients A représentent des fractions rationnelles quelconques de x. Cette fonction V satisfait à une équation linéaire d'ordre m^2, qu'il serait facile de former; désignons cette équation par

$$\frac{d^{m^2} V}{dx^{m^2}} + P_1 \frac{d^{m^2-1} V}{dx^{m^2-1}} + \ldots + P_{m^2} V = 0, \tag{2}$$

où les P sont évidemment des fonctions rationnelles.

On a d'ailleurs, en différentiant V un nombre de fois égal à m^2-1, m^2 équations du premier degré par rapport à V et ses dérivées, qui donnent

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 V + \alpha_2 \frac{dV}{dx} + \ldots + \alpha_{m^2-1} \frac{d^{m^2-1} V}{dx^{m^2-1}}, \\ y_2 &= \beta_1 V + \beta_2 \frac{dV}{dx} + \ldots + \beta_{m^2-1} \frac{d^{m^2-1} V}{dx^{m^2-1}}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_m &= \lambda_1 V + \lambda_2 \frac{dV}{dx} + \ldots + \lambda_{m^2-1} \frac{d^{m^2-1} V}{dx^{m^2-1}}, \end{aligned}$$

où les $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont rationnelles en x.

A toute intégrale de l'équation (2) correspond un système d'intégrales y_1, $y_2, \ldots, y_m$ de l'équation (1); ce système pourrait n'être pas fondamental. Ceci arriverait si le déterminant de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$ était nul; en écrivant ceci, on obtiendra une certaine équation en V

$$\varphi\left(V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^k V}{dx^k}\right) = 0, \tag{3}$$

k étant au plus égal à m^2-1.

On aura donc un système fondamental $y_1, y_2, \ldots, y_m$ si l'on prend pour V une intégrale de l'équation (2) ne satisfaisant pas à l'équation (3).

Ceci posé, il arrivera, en général, c'est-à-dire si l'équation (1) est prise arbitrairement, que l'équation (2) n'aura aucune solution commune avec une équation différentielle (linéaire ou non linéaire) à coefficients rationnels, d'ordre inférieur à m^2, si l'on fait abstraction des solutions qui satisfont à l'équation (3).

Mais il pourra, dans certains cas, en être autrement; supposons donc que l'équation différentielle d'ordre p

$$(4) \qquad f\left(x, \mathrm{V}, \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \ldots, \frac{d^p\mathrm{V}}{dx^p}\right) = 0$$

(f représentant une fonction rationnelle) remplisse cette condition. Je suppose, de plus, l'équation précédente *irréductible*, dans le sens employé par M. Kœnigsberger (*Théorie des équations différentielles*, 1882), c'est-à-dire n'ayant aucune solution commune avec une équation de même forme et d'ordre moindre; dans ces conditions, *toutes* les fonctions V satisfaisant à l'équation (4) satisferont à l'équation (2), et, de plus, l'équation (4) n'aura, avec l'équation (3), *aucune* solution commune; par suite, à chaque solution de l'équation

$$f = 0$$

correspond un système fondamental d'intégrales pour l'équation linéaire proposée.

Soient donc $y_1, y_2, \ldots, y_m$ le système fondamental correspondant à une certaine solution V de l'équation $f = 0$ et $\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \ldots, \mathrm{Y}_m$ le système correspondant à une solution quelconque V de la même équation; on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}_1 &= a_{1,1}\, y_1 + a_{1,2}\, y_2 + \ldots + a_{1,m}\, y_m, \\ \mathrm{Y}_2 &= a_{2,1}\, y_1 + a_{2,2}\, y_2 + \ldots + a_{2,m}\, y_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{Y}_m &= a_{m,1} y_1 + a_{m,2} y_2 + \ldots + a_{m,m} y_m; \end{aligned}$$

les coefficients a dépendent seulement de p paramètres arbitraires, et nous allons voir facilement qu'on peut les considérer comme des fonctions *algébriques* de p paramètres arbitraires.

En effet, considérons l'intégrale générale de l'équation

$$f\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \dots, \frac{d^pV}{dx^p}\right) = 0.$$

Cette intégrale générale sera nécessairement de la forme

$$V = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{m'} v_{m'},$$

les v étant des solutions de l'équation (2), et les α des fonctions *algébriques* convenables de p paramètres arbitraires. Donc, dans

$$Y_1, \quad Y_2, \quad \dots, \quad Y_m$$

figureront *algébriquement* p constantes arbitraires, et, par suite, si y_1, $y_2, \dots, y_m$ désignent un système fondamental correspondant à une solution particulière v de l'équation f, les coefficients a de la substitution

$$\text{(S)} \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_1 = a_{1,1}\, y_1 + a_{1,2}\, y_2 + \dots + a_{1,m}\, y_m, \\ Y_2 = a_{2,1}\, y_1 + a_{2,2}\, y_2 + \dots + a_{2,m}\, y_m, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ Y_m = a_{m,1} y_1 + a_{m,2} y_2 + \dots + a_{m,m} y_m \end{array} \right.$$

dépendront, d'une manière algébrique, de p paramètres arbitraires; nous désignerons ces paramètres par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

Il est évident que, si l'on considère deux substitutions, telles que (S), correspondant à deux systèmes distincts de valeurs des paramètres λ, le produit de ces substitutions sera une substitution de même forme, les paramètres λ étant remplacés par un troisième système de valeurs. Les substitutions (S) forment donc *un groupe continu de transformations*, d'après l'expression adoptée par M. Sophus Lie dans ses profondes et importantes recherches [voir *Theorie der Transformationsgruppen* (*Math. Annalen*, t. XVI) et une série de Mémoires en 1876-1878-1879 dans les Archives norwégiennes *for Mathematik og naturvidenskab*].

Je désignerai par G ce groupe *continu et algébrique* de transformations linéaires, et nous l'appellerons le *groupe de transformations* relatif à l'équation linéaire (1). Ce groupe de transformations ne doit évidemment pas être confondu avec ce que l'on appelle généralement le *groupe de l'équation linéaire*.

3. Tels sont les résultats auxquels on est tout naturellement conduit, en cherchant à développer, pour les équations différentielles linéaires, une théorie analogue à celle de Galois pour les équations algébriques; nous nous trouvons ainsi amenés à la considération des groupes de transformations linéaires et *algébriques*.

Présentons d'abord à ce sujet une remarque générale.

Concevons un tel groupe de transformations

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{1,1} y_1 + a_{1,2} y_2 + \ldots + a_{1,n} y_n, \\ Y_2 &= a_{2,1} y_1 + a_{2,2} y_2 + \ldots + a_{2,n} y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_n &= a_{n,1} y_1 + a_{n,2} y_2 + \ldots + a_{n,n} y_n, \end{aligned}$$

les a étant des fonctions algébriques de r paramètres arbitraires ($r < n^2$). Différentions ces équations une fois, deux fois, ... jusqu'à $(n-1)$ fois. On aura d'abord

$$\begin{aligned} \frac{dY_1}{dx} &= a_{1,1} \frac{dy_1}{dx} + \ldots + a_{1,n} \frac{dy_n}{dx}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{dY_n}{dx} &= a_{n,1} \frac{dy_1}{dx} + \ldots + a_{n,n} \frac{dy_n}{dx}, \end{aligned}$$

et d'autres équations semblables. Entre $r+1$ de ces équations, qui sont en nombre n^2, éliminons les paramètres; nous aurons une relation entre les Y et leurs dérivées, et entre les y et leurs dérivées, et ce sera une relation algébrique entière.

Soit

$$f\left(Y_1, \frac{dY_1}{dx}, \ldots, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right) = 0. \tag{1}$$

Concevons maintenant qu'on effectue sur $y_1, y_2, \ldots, y_n$ une substitution quelconque du groupe de transformations; on aura, en désignant par y'_1, $y'_2, \ldots, y'_n$ les valeurs transformées de $y_1, \ldots, y_n$,

$$\begin{aligned} Y_1 &= A_{1,1} y'_1 + A_{1,2} y'_2 + \ldots + A_{1,n} y'_n, \\ Y_2 &= A_{2,1} y'_1 + A_{2,2} y'_2 + \ldots + A_{2,n} y'_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_n &= A_{n,1} y'_1 + A_{n,2} y'_2 + \ldots + A_{n,n} y'_n; \end{aligned}$$

on aura, par suite, en faisant la même élimination que plus haut,

$$(2) \qquad f\left(Y_1, \frac{dY_1}{dx}, \ldots, y'_1, \frac{dy'_1}{dx}, \ldots\right) = 0;$$

les relations (1) et (2) doivent avoir lieu, quels que soient les Y et leurs dérivées. Les coefficients des différents termes en Y et $\frac{dY}{dx}$, ... seront donc les mêmes, à un facteur près; on obtiendra ainsi des polynômes

$$\varphi\left(y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right)$$

en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et leurs dérivées [au plus jusqu'à l'ordre $(n-1)$]; ces polynômes seront des invariants du groupe, c'est-à-dire que, effectuant sur les y et simultanément sur leurs dérivées une substitution du groupe, on aura

$$\varphi\left(y'_1, \frac{dy'_1}{dx}, \ldots\right) = \mu\,\varphi\left(y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots\right),$$

μ étant une constante.

L'étude des groupes de transformations est donc intimement liée à la recherche des polynômes ou des systèmes de polynômes en

$$\begin{array}{cccc} y_1, & y_2, & \ldots, & y_n, \\ \frac{dy_1}{dx}, & \frac{dy_2}{dx}, & \ldots, & \frac{dy_n}{dx}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}, & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} & \ldots, & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}, \end{array}$$

qui se reproduisent, à un facteur près, quand on effectue simultanément sur les termes d'une même ligne un ensemble de substitutions linéaires.

4. Cherchons à quoi reviendra la recherche directe des groupes algébriques de transformations linéaires. Il est nécessaire de rappeler les théorèmes généraux de M. Lie sur les groupes de transformations (*Mathem. Annalen*, t. XVI). Considérons, avec l'éminent géomètre, les n équations

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui définissent une famille de transformations entre les x et les x', où figurent r paramètres arbitraires $a_1, \ldots, a_r$. Ces transformations formeront

un groupe si la succession de deux transformations de cette famille est encore une transformation de la même famille.

Une transformation est dite *infinitésimale* par M. Lie si elle a la forme

$$x'_i = x_i + X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\delta t$$

ou

$$\delta x_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\delta t,$$

δt désignant une quantité infiniment petite.

M. Lie a montré que chaque groupe de transformations à r paramètres contient r transformations infinitésimales indépendantes. Ces transformations infinitésimales déterminent complètement le groupe de transformations.

Soient

$$\delta_q x_1 = X_{q,1}\delta t, \qquad \delta_q x_2 = X_{q,2}\delta t, \qquad \ldots, \qquad \delta_q x_n = X_{q,n}\delta t \qquad (q = 1, 2, \ldots, r)$$

les r transformations infinitésimales du groupe. On aura pour chaque valeur de i, en posant $A_q(F) = X_{q,i}\frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + X_{q,n}\frac{\partial F}{\partial x_n}$, $\frac{r(r-1)}{2}$ relations de la forme

$$(E) \qquad A_j(X_{qi}) - A_q(X_{ji}) = \sum_s C_{jqs}X_{si}.$$

Les C_{jqs} sont des constantes indépendantes du nombre i. On a ainsi entre les X $\frac{r(r-1)n}{2}$ identités, qui expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que les r transformations infinitésimales considérées puissent être les transformations infinitésimales d'un groupe à r paramètres. Ces conditions peuvent encore se mettre sous la forme

$$(A_j A_q),$$

c'est-à-dire

$$A_j[A_q(F)] - A_q[A_j(F)] = \sum_s C_{jqs}A_s(F).$$

Ces conditions étant remplies, on aura le groupe lui-même en procédant comme il suit. Considérons les équations différentielles

$$\frac{dx_1}{dt} = \sum_{k=1}^{k=r}\lambda_k X_{k,1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \sum \lambda_k X_{k,2}, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = \sum \lambda_k X_{k,n},$$

où les λ sont à considérer comme des constantes. Soient

$$W_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1 t, \lambda_2 t, \ldots, \lambda_r t) = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

n intégrales premières de ce système, où les λ ont été mis en évidence, et posons

$$W_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) = W_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1 t_0, \ldots, \lambda_r t_0);$$

de ces n équations, on tirera

$$x'_i = f_i[x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1(t - t_0), \lambda_2(t - t_0), \ldots, \lambda_r(t - t_0)];$$

ce sera le groupe cherché, en remplaçant

$$\lambda_1(t - t_0), \quad \lambda_2(t - t_0), \quad \ldots, \quad \lambda_r(t - t_0)$$

par les r paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

Ces théorèmes généraux rappelés, revenons maintenant aux groupes *linéaires* de transformations. Les substitutions infinitésimales seront manifestement ici des substitutions linéaires; on doit donc partir de r substitutions linéaires, entre lesquelles on supposera vérifiées les identités (E), dont il a été parlé plus haut. Le système

$$\frac{dx_1}{dt} = \Sigma \lambda_k X_{k,1}, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = \Sigma \lambda_k X_{k,n}$$

est ici un système d'équations linéaires à coefficients constants. Nous aurons, d'après ce qui précède, à chercher les intégrales de ce système, qui, pour $t = t_0$, deviennent respectivement égales à $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Or ces intégrales devront être nécessairement de la forme

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} x'_1 = A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + \ldots + A_{1n} x_n, \\ x'_2 = A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + \ldots + A_{2n} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_n = A_{n1} x_1 + A_{n2} x_2 + \ldots + A_{nn} x_n, \end{cases}$$

les A étant des expressions linéaires et homogènes en $e^{\mu_1(t-t_0)}, e^{\mu_2(t-t_0)}, \ldots, e^{\mu_n(t-t_0)}$, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ étant les racines de l'équation fondamentale relative au système des équations linéaires. Cette équation sera évidemment de la

forme

$$\mu^n + \varphi_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)\mu^{n-1} + \ldots + \varphi_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = 0,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ étant des polynômes homogènes en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ de degrés respectivement égaux à leur indice; les μ seront donc des fonctions algébriques et homogènes de degré *un* en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Quant aux coefficients de $e^{\mu_1(t-t_0)}, \ldots, e^{\mu_n(t-t_0)}$ dans les A, ce seront des fonctions homogènes de degré *zéro* en $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$.

Si donc on pose

$$\lambda_1(t-t_0) = a_1, \qquad \lambda_2(t-t_0) = a_2, \qquad \ldots, \qquad \lambda_r(t-t_0) = a_r$$

et, en outre,

$$\mu(t-t_0) = \rho,$$

on aura pour ρ l'équation

$$\rho^n + \varphi_1(a_1, \ldots, a_r)\rho^{n-1} + \ldots + \varphi_n(a_1, \ldots, a_r) = 0,$$

dont nous désignerons les racines par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$.

Les A seront alors des fonctions linéaires et homogènes en $e^{\rho_1}, e^{\rho_2}, \ldots, e^{\rho_n}$, dont les coefficients seront des fonctions rationnelles en $a_1, a_2, \ldots, a_r, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$.

Les équations (S) donneront alors le groupe de transformations qui a pour substitutions infinitésimales les r substitutions initiales. Ce groupe ne sera pas, en général, algébrique, et la question serait de chercher comment doivent être choisies les r substitutions initiales pour que le groupe fût algébrique. Je me réserve de revenir plus tard sur cette question générale; nous allons examiner seulement, en ce moment, certains cas particuliers, d'ailleurs fort étendus.

5. Dans un de ses Mémoires (*Archives norwégiennes*, 1878, p. 110), M. Sophus Lie considère incidemment un groupe particulier de transformations linéaires. Désignons, comme plus haut, les r substitutions infinitésimales par $A_1(F), A_2(F), \ldots, A_r(F)$ et supposons-les telles que le crochet (A_i, A_{i+k}) soit une fonction linéaire de $A_1, A_2, \ldots, A_{i+k-1}$.

M. Lie a montré que, dans ces conditions, on pourra, par un choix convenable des variables indépendantes, donner aux expressions A(F) la forme

commune

$$\alpha x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)\frac{\partial F}{\partial x_2} + (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)\frac{\partial F}{\partial x_3} + \ldots + (\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \ldots + \rho_n x_n)\frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

Ce sont les groupes dont les r substitutions infinitésimales sont de cette forme, que nous allons considérer.

On peut remarquer que *tout* groupe à *deux* paramètres rentre nécessairement dans l'hypothèse précédente, et c'est de ce cas que nous allons d'abord nous occuper. Soient donc

$$A_1(F) = \alpha x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)\frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + (\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \ldots + \rho_n x_n)\frac{\partial F}{\partial x_n},$$

$$A_2(F) = \alpha' x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + (\beta'_1 x_1 + \beta'_2 x_2)\frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + (\rho'_1 x_1 + \rho'_2 x_2 + \ldots + \rho'_n x_n)\frac{\partial F}{\partial x_n}$$

les deux expressions correspondant aux deux substitutions fondamentales. Il nous faut écrire que $(A_1 A_2)$ est une combinaison linéaire de $A_1(F)$ et $A_2(F)$; on voit de suite qu'il faut poser

$$(A_1 A_2) = k(\alpha' A_1 - \alpha A_2),$$

car le terme en $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ manque dans $(A_1 A_2)$.

Les coefficients de $\frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}$ dans $(A_1 A_2)$ ne contiennent respectivement pas de termes en $x_2, x_3, \ldots, x_n$; il en résulte que

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta_2}{\beta'_2} = \frac{\gamma_3}{\gamma'_3} = \cdots = \frac{\rho_n}{\rho'_n},$$

et nous allons voir que ces relations vont nous donner la solution du problème. Les racines $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ de l'équation caractéristique correspondant au système d'équations linéaires formées dans le précédent paragraphe sont ici

$$\mu_1 = \alpha\lambda_1 + \alpha'\lambda_2, \qquad \mu_2 = \beta_2\lambda_1 + \beta'\lambda_2, \qquad \ldots, \qquad \mu_n = \rho_n\lambda_1 + \rho'_n\lambda_2,$$

donc

$$\frac{\mu_1}{\alpha} = \frac{\mu_2}{\beta_2} = \frac{\mu_3}{\gamma_3} = \cdots = \frac{\mu_n}{\rho_n};$$

les exponentielles $e^{\mu_1(t-t_0)}$, $e^{\mu_2(t-t_0)}$, ..., $e^{\mu_n(t-t_0)}$ sont donc fonctions de l'une d'entre elles, et fonctions algébriques si α, β_2, γ_3, ..., ρ_n sont dans des rapports commensurables. Quant aux coefficients de $e^{\mu_i(t-t_0)}$ dans les A, ce seront des fonctions de $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$; nous pourrons donc prendre pour paramètres

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = a_1, \qquad e^{\mu_1(t-t_0)} = a_2.$$

La condition nécessaire et suffisante, pour que $A_1(F)$ et $A_2(F)$, supposés susceptibles d'engendrer un groupe de transformations, *engendrent un groupe algébrique, est donc que* α, β_2, ..., ρ_n *soient dans des rapports commensurables,* et ce théorème nous permet, par suite, de *trouver tous les groupes algébriques de transformations linéaires à deux paramètres.*

L'énoncé précédent résout la question proposée, mais il est facile de terminer complètement le calcul. On simplifiera, en supposant, comme il est permis, que

$$A_2(F) = a_1 x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + a_2 x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + a_n x_n \frac{\partial F}{\partial x_n};$$

l'identité donne des relations dont le type général sera

$$\begin{aligned} \nu_1\ \ (a_1 \ \ - a_i) &= k a_1 \nu_1, \\ \nu_2\ \ (a_2 \ \ - a_i) &= k a_1 \nu_2, \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots, \\ \nu_{i-1}(a_{i-1} - a_i) &= k a_1 \nu_{i-1}, \end{aligned}$$

et $\alpha a_i = a_1 \nu_i$, en supposant que le coefficient de $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ dans $A_1(F)$ soit

$$\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \ldots + \nu_i x_i.$$

Différentes hypothèses peuvent être faites; prenons le cas général où a_1, a_2, ..., a_n sont distincts. Si donc on considère toutes les différences

$$a_1 - a_i \quad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

elles ne pourront être égales; soit, dans $A_1(F)$, $\beta_1 \neq 0$.

Alors on aura

$$a_1 - a_2 = k a_1;$$

toutes les autres différences

$$a_1 - a_i \quad (i = 3, \ldots, n)$$

Dans (A_2, A_3), il n'y a pas de terme en $\frac{\partial F}{\partial x_1}$, et les coefficients de $\frac{\partial F}{\partial x_2}$, $\frac{\partial F}{\partial x_3}$, ..., $\frac{\partial F}{\partial x_n}$ ne contiennent respectivement pas de termes en $x_2, x_3, \ldots, x_n$; il en résulte que

$$\lambda\alpha + \mu\alpha' + \nu\alpha'' = 0, \quad \lambda\beta_2 + \mu\beta_2' + \nu\beta_2'' = 0, \quad \lambda\gamma_3 + \mu\gamma_3' + \nu\gamma_3'' = 0, \quad \ldots, \quad \lambda\rho_n + \mu\rho_n' + \nu\rho_n'' = 0;$$

pareillement la deuxième et la troisième identité nous donnent

$$\lambda'\alpha + \mu'\alpha' + \nu'\alpha'' = 0, \quad \lambda'\beta_2 + \mu'\beta_2' + \nu'\beta_2'' = 0, \quad \lambda'\gamma_3 + \mu'\gamma_3' + \nu'\gamma_3'' = 0, \quad \ldots, \quad \lambda'\rho_n + \mu'\rho_n' + \nu'\rho_n'' = 0,$$
$$\lambda''\alpha + \mu''\alpha' + \nu''\alpha'' = 0, \quad \lambda''\beta_2 + \mu''\beta_2' + \nu''\beta_2'' = 0, \quad \lambda''\gamma_3 + \mu''\gamma_3' + \nu''\gamma_3'' = 0, \quad \ldots, \quad \lambda''\rho_n + \mu''\rho_n' + \nu''\rho_n'' = 0.$$

On conclut de là, en laissant de côté des cas exceptionnels, dont la discussion, d'ailleurs bien facile, présenterait peu d'intérêt, que

$$\frac{\beta_2}{\alpha} = \frac{\beta_2'}{\alpha'} = \frac{\beta_2''}{\alpha''},$$
$$\frac{\gamma_3}{\alpha} = \frac{\gamma_3'}{\alpha'} = \frac{\gamma_3''}{\alpha''},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\rho_n}{\alpha} = \frac{\rho_n'}{\alpha'} = \frac{\rho_n''}{\alpha''}.$$

Ces relations vont nous donner de suite la solution du problème. Les racines $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ de l'équation caractéristique (*voir* n° 4) sont ici

$$\mu_1 = \lambda_1\alpha + \lambda_2\alpha' + \lambda_3\alpha'', \quad \mu_2 = \lambda_1\beta_2 + \lambda_2\beta_2' + \lambda_3\beta_2'', \quad \ldots, \quad \mu_n = \lambda_1\rho_n + \lambda_2\rho_n' + \lambda_3\rho_n'';$$

donc

$$\frac{\mu_1}{\alpha} = \frac{\mu_2}{\beta_2} = \frac{\mu_3}{\gamma_3} = \ldots = \frac{\mu_n}{\rho_n};$$

les exponentielles $e^{\mu_1(t-t_0)}, e^{\mu_2(t-t_0)}, \ldots, e^{\mu_n(t-t_0)}$ sont donc fonctions de l'une d'entre elles, et fonctions algébriques si $\alpha, \beta_2, \gamma_3, \ldots, \rho_n$ sont dans des rapports commensurables. Quant aux coefficients de $e^{\mu_i(t-t_0)}$ dans les A (*voir* n° 4), ce seront des fonctions de $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ et $\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$; nous pourrons donc prendre pour paramètres

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = a_1, \qquad \frac{\lambda_3}{\lambda_1} = a_2, \qquad e^{\mu_1(t-t_0)} = a_3,$$

et, sous la condition indiquée, le groupe sera algébrique.

7. Prenons comme exemple, en terminant, le cas de deux variables et de deux paramètres.

Soient

$$A_1(F) = \alpha\, x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)\frac{\partial F}{\partial x_2},$$

$$A_2(F) = a_1 x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + a_2 x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2};$$

on aura

$$a_1 - a_2 = k a_1, \qquad \alpha a_2 = a_1 \beta_2,$$

posons donc

$$a_2 = s a_1, \qquad \beta_2 = s \alpha.$$

On a les équations linéaires

$$\frac{dx_1}{dt} = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 \alpha) x_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda_2 \beta_1 x_1 + (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 \beta_2) x_2;$$

le groupe correspondant sera

$$x'_1 = \sigma_1 x_1,$$
$$x'_2 = \sigma_2 x_1 + \sigma_1^s x_2,$$

σ_1 et σ_2 étant les deux paramètres arbitraires; s devra être commensurable, en le désignant par $\frac{p}{q}$; on peut alors écrire le groupe

$$x'_1 = \sigma_1^q x_1,$$
$$x'_2 = \sigma_2 x_1 + \sigma_1^p x_2,$$

p et q étant deux entiers.

x_1 et le déterminant $x_1 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_1}{dt}$ sont les deux seuls invariants distincts de ce groupe si simple.

h étant une constante arbitraire. Cela posé, pour trouver les intégrales des équations d'équilibre (1), on peut procéder de la façon suivante :

Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(3)\qquad \left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2=(\text{U}+h)^2,$$

qui définit Θ *comme fonction de* x, y, z, *et supposons que l'on ait trouvé une intégrale complète*

$$\Theta(x, y, z;\, \alpha, \beta, h)$$

de cette équation avec les deux constantes arbitraires α *et* β *distinctes de* h *et de la constante que l'on peut toujours ajouter à* Θ. *Les intégrales des équations d'équilibre* (1) *sont alors les suivantes*

$$(4)\qquad \frac{\partial\Theta}{\partial\alpha}=\alpha',\qquad \frac{\partial\Theta}{\partial\beta}=\beta',\qquad \frac{\partial\Theta}{\partial h}=s+h',$$

α', β', h' *étant de nouvelles constantes et* s *désignant l'arc de la courbe d'équilibre compté positivement dans un sens convenable.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons faire voir, en suivant la méthode indiquée par Jacobi dans ses *Vorlesungen über Dynamik*, que les valeurs de x, y, z en fonction de s, tirées des équations (4), vérifient les équations différentielles (1) et l'équation

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1.$$

Calculons d'abord $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$; pour cela, il faudra différentier les équations (4) en y considérant x, y, z comme des fonctions implicites de s définies par ces équations. Nous aurons ainsi

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\,\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\,\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\,\partial z}\frac{dz}{ds}=0,\\
&\frac{\partial^2\Theta}{\partial\beta\,\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial\beta\,\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial\beta\,\partial z}\frac{dz}{ds}=0,\\
&\frac{\partial^2\Theta}{\partial h\,\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial h\,\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial h\,\partial z}\frac{dz}{ds}=1.
\end{aligned}\right.$$

D'autre part, si, dans l'équation différentielle (3), on met à la place de Θ la fonction trouvée

$$\Theta(x, y, z; \alpha, \beta, h),$$

le résultat de la substitution sera identique en $x, y, z, \alpha, \beta, h$. Si nous prenons les dérivées partielles de cette identité (3) par rapport à α, β et h successivement, nous aurons

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\,\partial x}\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\,\partial y}\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\,\partial z}\frac{\partial\Theta}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial^2\Theta}{\partial\beta\,\partial x}\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial\beta\,\partial y}\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial\beta\,\partial z}\frac{\partial\Theta}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial^2\Theta}{\partial h\,\partial x}\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial h\,\partial y}\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial h\,\partial z}\frac{\partial\Theta}{\partial z}=U+h. \end{aligned}\right.$$

Les équations (5) sont trois équations du premier degré en $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, et les équations (6) sont du premier degré en $\frac{\partial\Theta}{\partial x}, \frac{\partial\Theta}{\partial y}, \frac{\partial\Theta}{\partial z}$. De plus, les équations (5) se déduisent des équations (6) par la substitution de

$$(U+h)\frac{dx}{ds},\quad (U+h)\frac{dy}{ds},\quad (U+h)\frac{dz}{ds}$$

à

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x},\quad \frac{\partial\Theta}{\partial y},\quad \frac{\partial\Theta}{\partial z}.$$

On aura donc

$$(U+h)\frac{dx}{ds}=\frac{\partial\Theta}{\partial x},\qquad (U+h)\frac{dy}{ds}=\frac{\partial\Theta}{\partial y},\qquad (U+h)\frac{dz}{ds}=\frac{\partial\Theta}{\partial z}.$$

En faisant la somme des carrés de ces trois équations et tenant compte de la relation (3), on trouve la relation

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,$$

qui montre que s est bien l'arc de la courbe. Si, dans les équations ci-dessus, on remplace $U+h$ par $-T$, elles deviennent

$$(7)\qquad T\frac{dx}{ds}=-\frac{\partial\Theta}{\partial x},\qquad T\frac{dy}{ds}=-\frac{\partial\Theta}{\partial y},\qquad T\frac{dz}{ds}=-\frac{\partial\Theta}{\partial z};$$

d'où, en différentiant,

$$\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) = -\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial z}\frac{dz}{ds},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ou, comme $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\mathrm{U}+h}\frac{\partial\Theta}{\partial x}, \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\mathrm{U}+h}\frac{\partial\Theta}{\partial y}, \frac{dz}{ds} = \frac{1}{\mathrm{U}+h}\frac{\partial\Theta}{\partial z}$,

$$\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) = -\frac{1}{\mathrm{U}+h}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\Theta}{\partial y} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

mais, en différentiant l'identité (3) par rapport à x, il vient

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial\Theta}{\partial y} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial\Theta}{\partial z} = (\mathrm{U}+h)\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}:$$

donc l'équation précédente devient

$$\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x},$$

et l'on trouverait de même

$$\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right) = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y},$$

$$\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dz}{ds}\right) = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z},$$

équations qui ne sont autre chose que les équations d'équilibre (1). Le théorème est donc démontré.

Supposons que l'on veuille déterminer les constantes qui figurent dans les intégrales (4) par la condition que la courbe passe par deux points

$$(x_0, y_0, z_0), \quad (x_1, y_1, z_1)$$

et ait, entre ces deux points, une longueur l. Alors, en posant

$$\Theta_0 = \Theta(x_0, y_0, z_0; \alpha, \beta, h),$$

$$\Theta_1 = \Theta(x_1, y_1, z_1; \alpha, \beta, h),$$

on aura à résoudre, par rapport à α, β et h, les trois équations

$$\frac{\partial \Theta_0}{\partial \alpha} - \frac{\partial \Theta_1}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial \Theta_0}{\partial \beta} - \frac{\partial \Theta_1}{\partial \beta} = 0, \qquad \frac{\partial \Theta_0}{\partial h} - \frac{\partial \Theta_1}{\partial h} = \pm l.$$

On pourrait facilement appliquer la méthode d'intégration que nous venons d'exposer à chacun des cas particuliers suivants :

1° La fonction U dépend uniquement de la distance du point (x, y, z) à un plan fixe;

2° U dépend seulement de la distance du point (x, y, z) à un axe fixe;

3° U dépend seulement de la distance du point (x, y, z) à un point fixe.

Mais les calculs qu'il faudrait faire dans ces trois cas ne seraient que la répétition de ceux de Jacobi, dans ses *Vorlesungen über Dynamik*, par exemple dans la XXIV[e] Leçon; il serait sans intérêt de les reprendre ici.

SUR UN PROBLÈME

RELATIF

AUX COURBES A DOUBLE COURBURE,

PAR M. E. GOURSAT.

Quand on se donne le rayon de courbure d'une courbe plane en fonction de l'arc, la détermination des coordonnées d'un point de cette courbe se ramène, comme on sait, à trois quadratures (*voir* HERMITE, *Cours d'Analyse*, p. 157). Si l'on se propose le problème analogue pour les courbes gauches, on est conduit à un système de trois équations linéaires simultanées du premier ordre, pour déterminer les cosinus des angles que font la tangente, la normale principale et la binormale avec un axe fixe. Ce système peut lui-même être remplacé par une seule équation différentielle linéaire du troisième ordre. Les coefficients de cette équation ne dépendant que de deux fonctions arbitraires, il est visible que l'on n'a ainsi qu'une équation particulière parmi les équations linéaires du troisième ordre. J'ai réussi à ramener l'intégration de cette équation à celle d'une *équation linéaire du second ordre,* sans second membre. La méthode suivie montre bien clairement la raison de cette réduction et fournit un exemple intéressant d'un cas de réduction aujourd'hui bien connu pour les équations linéaires du troisième ordre. Dans un Mémoire (¹) déjà ancien (*Journal de Crelle*, t. 60, p. 182), M. Hoppe s'est occupé d'une question analogue, qui n'est, en réalité, qu'un cas particulier de la précédente. Il est amené également à une équation linéaire du second ordre, mais il paraît difficile de retrouver les considérations qui l'ont conduit aux changements successifs de variables permettant d'effectuer la réduction.

(¹) Ce Mémoire m'a été signalé par M. Appell.

1. Soient x, y, z les coordonnées d'un point d'une courbe gauche C dans un système d'axes rectangulaires, s l'arc de cette courbe, R et T les rayons de courbure et de torsion, α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale. On a, d'après les formules de Frenet et de Serret,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \qquad \frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}, \qquad \frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T},$$
$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta'}{R}, \qquad \frac{d\beta'}{ds} = -\frac{\beta}{R} - \frac{\beta''}{T}, \qquad \frac{d\beta''}{ds} = \frac{\beta'}{T},$$
$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R}, \qquad \frac{d\gamma'}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma''}{T}, \qquad \frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\gamma'}{T}.$$

Supposons que l'on connaisse R et T en fonction de l'arc s, et que l'on veuille obtenir les coordonnées x, y, z en fonction de la même variable. Les neuf cosinus $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots$ seront déterminés par les neuf équations précédentes. En remarquant que les trois équations de la première ligne ne renferment que les inconnues α, α', α'', et que les deux autres systèmes se déduisent de celui-là en changeant α en β, puis en γ, nous voyons que la détermination des neuf cosinus n'exige que l'intégration du système de trois équations

$$(1) \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \qquad \frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}, \qquad \frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}.$$

Une fois ces neuf cosinus obtenus, on trouvera les coordonnées x, y, z par des quadratures. Le problème dépend donc, avant tout, de l'intégration du système (1).

Au lieu du système (1), je prendrai un système équivalent formé comme il suit. Posons

$$u = \alpha + \alpha''\sqrt{-1}, \qquad V = \frac{1}{R} + \frac{1}{T}\sqrt{-1},$$
$$u_0 = \alpha - \alpha''\sqrt{-1}, \qquad V_0 = \frac{1}{R} - \frac{1}{T}\sqrt{-1};$$

d'une manière générale, je désignerai deux quantités conjuguées par la même lettre affectée pour l'une d'elles de l'indice o. Le système (1) pourra alors être remplacé par le suivant :

$$(2) \qquad \frac{du}{ds} = V\alpha', \qquad \frac{du_0}{ds} = V_0\alpha', \qquad 2\frac{d\alpha'}{ds} = -uV_0 - u_0V;$$

on en déduit, en désignant par V', V'', V'_0, V''_0 les dérivées de V, V_0 par rapport à s,

$$\frac{d^2u}{ds^2} = \alpha' V' - \frac{V}{2}(uV_0 + u_0 V),$$

$$\frac{d^3u}{ds^3} = \alpha' V'' - V'(uV_0 + u_0 V) - \frac{V}{2}(uV'_0 + u_0 V') - V^2 V_0 \alpha'.$$

De la première des équations (2) on tire

$$\alpha' = \frac{1}{V}\frac{du}{ds};$$

la première des relations précédentes donne ensuite

$$uV_0 + u_0 V = -\frac{2}{V}\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{2V'}{V^2}\frac{du}{ds},$$

$$u_0 = -\frac{2}{V^2}\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{2V'}{V^3}\frac{du}{ds} - u\frac{V_0}{V}.$$

Portons ces valeurs de α' et de u_0 dans la relation qui donne $\frac{d^3u}{ds^3}$; on trouve une équation du troisième ordre pour déterminer u

$$(3) \qquad \frac{d^3u}{ds^3} - 3\frac{V'}{V}\frac{d^2u}{ds^2} + \left[3\left(\frac{V'}{V}\right)^2 + VV_0 - \frac{V''}{V}\right]\frac{du}{ds} + \frac{VV'_0 - V_0V'}{2}u = 0.$$

L'équation (3), jointe aux équations

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha' = \dfrac{1}{V}\dfrac{du}{ds}, \\ u_0 = -\dfrac{2}{V^2}\dfrac{d^2u}{ds^2} + 2\dfrac{V'}{V^3}\dfrac{du}{ds} - u\dfrac{V_0}{V}, \end{cases}$$

forme un système équivalent au système (2). Posons de même

$$v = \beta + \beta''\sqrt{-1}, \qquad w = \gamma + \gamma''\sqrt{-1},$$
$$v_0 = \beta - \beta''\sqrt{-1}, \qquad w_0 = \gamma - \gamma''\sqrt{-1};$$

un calcul tout pareil au précédent prouve que les fonctions v et w sont aussi des intégrales de l'équation (3). Mais on a la relation évidente

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Donc, *entre trois intégrales linéairement indépendantes de l'équation* (3), *il existe une relation quadratique homogène à coefficients constants.* Or l'intégration de toute équation linéaire du troisième ordre jouissant de cette propriété se ramène à l'intégration d'une équation linéaire du second ordre, comme l'a montré pour la première fois M. Laguerre (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 216). De là résulte la réduction annoncée.

2. Je rappellerai en quelques mots comment on peut effectuer la réduction. Soit

$$\frac{d^2Y}{ds^2} = a\frac{dY}{ds} + bY \tag{5}$$

une équation linéaire du second ordre, à coefficients quelconques. Posons

$$u = Y^2;$$

on en déduit, en tenant compte de l'équation (5),

$$\begin{aligned}
\frac{du}{ds} &= 2Y\frac{dY}{ds},\\
\frac{d^2u}{ds^2} &= 2\left(\frac{dY}{ds}\right)^2 + 2aY\frac{dY}{ds} + 2bY^2,\\
\frac{d^3u}{ds^3} &= \left(4\frac{dY}{ds} + 2aY\right)\left(a\frac{dY}{ds} + bY\right) + 2a\left(\frac{dY}{ds}\right)^2 + (2a' + 4b)Y\frac{dY}{ds} + 2b'Y^2.
\end{aligned}$$

L'élimination de Y^2, $Y\frac{dY}{ds}$, $\left(\frac{dY}{ds}\right)^2$ conduit à une équation linéaire du troisième ordre en u

$$\frac{d^3u}{ds^3} + 3B\frac{d^2u}{ds^2} + 3C\frac{du}{ds} + Du = 0, \tag{6}$$

les coefficients B, C, D ayant les valeurs suivantes :

$$B = -a, \qquad 3C = 2a^2 - 4b - \frac{da}{ds}, \qquad D = 2\left(2ab - \frac{db}{ds}\right). \tag{7}$$

Soient y_1, y_2 un système fondamental d'intégrales de l'équation (5); l'équation (6) admettra les trois intégrales y_1^2, y_2^2, $(y_1 + y_2)^2$, et son intégrale générale sera de la forme

$$u = Cy_1^2 + C'y_2^2 + C''(y_1 + y_2)^2$$

ou, ce qui revient au même, de la forme

$$u = Cy_1^2 + C'y_2^2 + C''y_1y_2,$$

de sorte que l'intégration de l'équation (6) se ramène à l'intégration de l'équation (5). Les coefficients B, C, D de l'équation (6) ne dépendent que de deux fonctions arbitraires a et b, de sorte que l'on n'a ainsi qu'un type particulier d'équations du troisième ordre. L'élimination de a et de b entre les relations (7) conduit à une équation de condition qui, en employant les notations de M. Laguerre, exprime que l'invariant I est nul. D'un autre côté, entre les trois intégrales y_1^2, y_1y_2, y_2^2, on a la relation

$$(y_1y_2)^2 - y_1^2y_2^2 = 0,$$

et l'on en conclut que les intégrales de l'équation (7) vérifient une relation quadratique à coefficients constants. Inversement, toute équation linéaire du troisième ordre jouissant de cette propriété est de la forme (6) [1], et, pour avoir son intégrale générale, il suffira de connaître l'intégrale générale de l'équation (5), où

$$a = -B, \qquad b = \frac{1}{4}\left(2B^2 - 3C + \frac{dB}{ds}\right).$$

Appliquons ceci à l'équation (3); on aura

$$B = -\frac{V'}{V}, \qquad 3C = 3\left(\frac{V'}{V}\right)^2 + VV_0 - \frac{V''}{V}, \qquad D = \frac{VV'_0 - V_0V'}{2},$$

et les deux premières des équations (7) donnent

$$a = \frac{V'}{V}, \qquad b = \frac{1}{4}\left[2\left(\frac{V'}{V}\right)^2 - 3\left(\frac{V'}{V}\right)^2 - VV_0 + \frac{V''}{V} - \frac{V''}{V} + \left(\frac{V'}{V}\right)^2\right] = -\frac{1}{4}VV_0.$$

Ces valeurs de a et de b satisfont aussi à la dernière des formules (7); ce qui fournit une vérification du théorème général sur lequel je me suis appuyé. En définitive, *l'intégration de l'équation* (3) *est ramenée à l'intégration de l'équation linéaire du second ordre*

$$\frac{d^2Y}{ds^2} = \frac{V'}{V}\frac{dY}{ds} - \frac{1}{4}VV_0Y. \tag{8}$$

---

[1] Pour la démonstration de cette propriété, *voir* un petit travail que j'ai publié dans le *Bulletin de la Société mathématique*, t. XI, p. 145.

3. Les calculs précédents supposent simplement que V et V_0 sont des fonctions analytiques de la variable s. Dans le problème de Géométrie qui nous occupe, les fonctions R et T prennent des valeurs réelles lorsque la variable indépendante prend des valeurs réelles, au moins entre certaines limites, ou, ce qui revient au même, V et V_0 sont des fonctions conjuguées. Supposons maintenant que l'on connaisse l'intégrale générale de l'équation (8), et proposons-nous de déterminer les quantités u, v, w, ainsi que les neuf cosinus directeurs $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$.

Soient Y et Z deux intégrales linéairement indépendantes de l'équation (8); l'équation (3) admettra les trois intégrales

$$u = YZ, \qquad v = \frac{i}{2}(Y^2 + Z^2), \qquad w = \frac{1}{2}(Y^2 - Z^2),$$

vérifiant la relation $u^2 + v^2 + w^2 = 0$. Réciproquement, les formules précédentes donnent tous les systèmes d'intégrales de l'équation (3) vérifiant la relation $u^2 + v^2 + w^2 = 0$, pourvu que l'on prenne pour Y et Z deux intégrales quelconques distinctes de l'équation (8). Voyons comment il faudra prendre ces deux intégrales. Soient Y_0, Z_0, u_0, v_0, w_0 les fonctions conjuguées de Y, Z, u, v, w; on a

$$u_0 = Y_0 Z_0, \qquad v_0 = -\frac{i}{2}(Y_0^2 + Z_0^2), \qquad w_0 = \frac{1}{2}(Y_0^2 - Z_0^2),$$

$$u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 = 0,$$

$$\alpha = \frac{u + u_0}{2}, \qquad \beta = \frac{v + v_0}{2}, \qquad \gamma = \frac{w + w_0}{2},$$

$$\alpha'' = \frac{u - u_0}{2i}, \qquad \beta'' = \frac{v - v_0}{2i}, \qquad \gamma'' = \frac{w - w_0}{2i}.$$

D'autre part, on doit avoir les relations

$$\begin{aligned} \alpha^2 &+ \beta^2 &+ \gamma^2 &= 1, \\ \alpha''^2 &+ \beta''^2 &+ \gamma''^2 &= 1, \\ \alpha\alpha'' &+ \beta\beta'' &+ \gamma\gamma'' &= 0, \\ \alpha\, d\alpha'' &+ \beta\, d\beta'' &+ \gamma\, d\gamma'' &= 0, \end{aligned}$$

dont les trois premières ont une signification évidente; la dernière exprime que les deux cônes ayant pour sommet l'origine et pour directrices les deux courbes sphériques décrites par les deux points de coordonnées (α, β, γ) et

$(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ sont supplémentaires. En tenant compte des relations

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0, \qquad u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 = 0,$$

ces conditions se réduisent à deux

$$\begin{aligned} uu_0 + vv_0 + ww_0 &= 2, \\ u\,du_0 + v\,dv_0 + w\,dw_0 &= 0; \end{aligned}$$

mais nous avons

$$\begin{aligned} uu_0 + vv_0 + ww_0 &= YZY_0Z_0 + \tfrac{1}{4}(Y^2+Z^2)(Y_0^2+Z_0^2) + \tfrac{1}{4}(Y^2-Z^2)(Y_0^2-Z_0^2) \\ &= \frac{(YY_0+ZZ_0)^2}{2}, \\ u\,du_0 + v\,dv_0 + w\,dw_0 &= YZ(Y_0\,dZ_0 + Z_0\,dY_0) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(Y^2+Z^2)(Y_0\,dY_0 + Z_0\,dZ_0) + \tfrac{1}{2}(Y^2-Z^2)(Y_0\,dY_0 - Z_0\,dZ_0) \\ &= (YY_0+ZZ_0)(Y\,dY_0 + Z\,dZ_0), \end{aligned}$$

et les conditions précédentes deviennent

$$YY_0 + ZZ_0 = 2, \tag{9}$$

$$Y\,dY_0 + Z\,dZ_0 = 0. \tag{10}$$

La condition (10) peut être regardée comme la condition nécessaire et suffisante; en effet, si elle est remplie, on aura aussi

$$Y_0\,dY + Z_0\,dZ = 0$$

et, par suite,

$$d(YY_0 + ZZ_0) = 0, \qquad YY_0 + ZZ_0 = k.$$

La constante k étant nécessairement réelle et positive, en multipliant les intégrales par un même facteur réel et positif, on aura

$$k = 2.$$

4. On obtiendra, comme il suit, un système d'intégrales vérifiant les relations (9) et (10). Entre les intégrales Y et Z, on a, d'après un théorème général, une relation de la forme

$$Y\,dZ - Z\,dY = C\,V\,ds,$$

C désignant un facteur constant. De même, les fonctions conjuguées Y_0,

et Z_0 vérifient l'équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2Y_0}{ds^2} = \frac{V'_0}{V_0}\frac{dY_0}{ds} - \frac{1}{4}VV_0Y,$$

et l'on aura

$$Y_0\,dZ_0 - Z_0\,dY_0 = C_0V_0\,ds.$$

Posons

$$\frac{1}{Y_0}\frac{dZ}{ds} = -\frac{1}{Z_0}\frac{dY}{ds} = \rho,$$

$$\frac{1}{Y}\frac{dZ_0}{ds} = -\frac{1}{Z}\frac{dY_0}{ds} = \rho_0,$$

et remplaçons dY, dY_0, dZ, dZ_0 par leurs valeurs dans les formules précédentes, elles deviennent

$$(YY_0 + ZZ_0)\rho = CV,$$

$$(YY_0 + ZZ_0)\rho_0 = C_0V_0;$$

on en déduit, en tenant compte de la relation (9),

$$\rho = \frac{C}{2}V, \qquad \rho_0 = \frac{C_0}{2}V_0.$$

Nous voyons, par conséquent, que Y et Z_0 doivent vérifier les deux équations simultanées

$$\frac{dY}{ds} = -\frac{C}{2}VZ_0,$$

$$\frac{dZ_0}{ds} = \frac{C_0}{2}V_0Y;$$

de même, les fonctions Y_0 et Z devront vérifier le système conjugué du précédent

$$\frac{dZ}{ds} = \frac{C}{2}VY_0,$$

$$\frac{dY_0}{ds} = -\frac{C_0}{2}V_0Z.$$

Réciproquement, si l'on élimine Z_0 entre les deux équations du premier système, on aboutit à l'équation du second ordre

$$\frac{d^2Y}{ds^2} = \frac{V'}{V}\frac{dY}{ds} - \frac{CC_0}{4}VV_0Y,$$

qui doit être identique avec l'équation (8). Il faudra donc que l'on ait $CC_0 = 1$ ou que C soit de la forme $e^{i\theta}$, θ désignant une constante réelle quelconque. Les systèmes d'équations précédents prennent alors la forme ci-dessous :

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dY}{ds} &= -\frac{1}{2} e^{i\theta} V Z_0, \\ \frac{dZ_0}{ds} &= \frac{1}{2} e^{-i\theta} V_0 Y; \end{aligned} \right.$$

$$(11') \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dZ}{ds} &= \frac{1}{2} e^{i\theta} V Y_0, \\ \frac{dY_0}{ds} &= -\frac{1}{2} e^{-i\theta} V_0 Z. \end{aligned} \right.$$

Les deux systèmes (11) et (11') sont équivalents, et chacun d'eux peut remplacer l'équation (8). Soit donc Y une intégrale particulière de l'équation (8); la seconde des équations (11') nous donne la valeur de Z

$$Z = \frac{-2e^{i\theta}}{V_0} \frac{dY_0}{ds};$$

il en résulte que, si Y est une intégrale particulière de l'équation (8), la fonction $\frac{1}{V_0}\frac{dY_0}{ds}$ sera aussi une intégrale. Il est facile de le vérifier directement. Si Y vérifie l'équation (8), on aura aussi

$$\frac{d^2Y_0}{ds^2} = \frac{V_0'}{V_0}\frac{dY_0}{ds} - \frac{1}{4} V V_0 Y_0;$$

en différentiant les deux membres de cette équation et éliminant Y_0, on parvient à l'équation suivante :

$$V_0 \frac{d^3Y_0}{ds^3} = \left(2V_0' + \frac{V'V_0}{V}\right)\frac{d^2Y_0}{ds^2} + \left(V_0'' - \frac{1}{4}VV_0^2 - \frac{V'V_0'}{V} - 2\frac{V_0'^2}{V_0}\right)\frac{dY_0}{ds}.$$

Posons maintenant

$$\frac{dY_0}{ds} = V_0 Z,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^2Y_0}{ds^2} = V_0' Z + V_0 \frac{dZ}{ds},$$

$$\frac{d^3Y_0}{ds^3} = V_0'' Z + 2V_0' \frac{dZ}{ds} + V_0 \frac{d^2Z}{ds^2};$$

en faisant la substitution dans l'équation qui précède, on retombe précisément sur l'équation (8). Ainsi, de toute intégrale particulière Y de l'équation (8), on peut déduire une nouvelle intégrale $\frac{1}{V_0}\frac{dY_0}{ds}$, et l'intégrale générale sera

$$CY + \frac{C'}{V_0}\frac{dY_0}{ds},$$

à moins que les deux intégrales ainsi obtenues ne soient pas distinctes. Mais il est toujours possible de trouver des intégrales particulières telles que le rapport $\frac{1}{V_0 Y}\frac{dY_0}{ds}$ ne se réduise pas à une constante. Soient, en effet, Y et Z des intégrales distinctes, telles que

$$\frac{1}{V_0}\frac{dY_0}{ds} = \lambda Y, \qquad \frac{1}{V_0}\frac{dZ_0}{ds} = \mu Z,$$

et considérons l'intégrale $aY + bZ$; on aura

$$\frac{1}{V_0}\frac{d(a_0 Y_0 + b_0 Z_0)}{ds} = a_0 \lambda Y + b_0 \mu Z,$$

et, pour que cette intégrale soit identique à la première, il faudra que l'on ait $ab_0\mu = a_0 b\lambda$, ce qui n'aura pas lieu pour des valeurs arbitraires de a et de b. Plus généralement, pour qu'une intégrale particulière Y soit telle que $\frac{1}{V_0 Y}\frac{dY_0}{ds}$ se réduise à une constante, il faut qu'il y ait une certaine relation entre les quatre constantes *réelles* dont dépend cette intégrale.

En définitive, nous sommes conduits à la règle suivante pour obtenir un système d'intégrales de l'équation (8) vérifiant les relations (9) et (10).

Soit Y *une intégrale particulière telle que le rapport* $\frac{1}{V_0 Y}\frac{dY_0}{ds}$ *ne se réduit pas à une constante; on associera à l'intégrale* Y *l'intégrale*

$$Z = \frac{-2e^{i0}}{V_0}\frac{dY_0}{ds}.$$

Les deux intégrales ainsi obtenues vérifient la relation (10), *comme il résulte des équations* (11) *et* (11′), *et, en les multipliant par une constante réelle convenable, elles vérifieront aussi l'équation* (9).

Remarque. — Il peut paraître singulier que la connaissance d'une seule intégrale particulière de l'équation (8) permette de former l'intégrale géné-

rale sans aucune quadrature; mais il est bien aisé de trouver des faits analogues. Considérons une équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2y}{ds^2} = a\frac{dy}{ds} + by,$$

où les coefficients a et b sont des fonctions réelles de la variable s; si y est une intégrale particulière de cette équation, la fonction conjuguée y_0 sera aussi une intégrale particulière, et l'intégrale générale sera $Cy + C'y_0$. Le procédé est en défaut si y_0 n'est pas distinct de y, c'est-à-dire si y est une fonction réelle ou le produit d'une fonction réelle par une constante. Ce cas exceptionnel correspond à celui qui a été signalé plus haut.

5. Supposons que l'on ait choisi les intégrales Y et Z comme il vient d'être expliqué, de façon qu'elles vérifient les équations (9), (10), (11) et (11'). Les formules du n° 3 nous font connaître u, v, w et, par suite, α, β, γ, α'', β'', γ''. Le point de coordonnées (α, β, γ) décrit sur la sphère de rayon égal à l'unité, ayant pour centre l'origine, une certaine courbe Σ; le point de coordonnées $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ décrit sur la même sphère une seconde courbe Θ. Les deux cônes, ayant pour bases ces deux courbes Σ et Θ et pour sommet l'origine, sont supplémentaires. Je dirai, pour abréger, que les deux courbes Σ et Θ sont supplémentaires. On sait que les tangentes en deux points correspondants de ces deux courbes sont parallèles à la droite, ayant pour cosinus directeurs α', β', γ'. Cela posé, considérons la courbe gauche C, représentée par les formules

$$x = \int \alpha\, ds, \qquad y = \int \beta\, ds, \qquad z = \int \gamma\, ds,$$

dont l'arc sera évidemment égal à s. Soient R_1 et T_1 les rayons de courbure et de torsion de C, σ et τ les arcs des courbes sphériques Σ et Θ; on aura

$$R_1 = \frac{ds}{d\sigma}, \qquad T_1 = \frac{ds}{d\tau}.$$

Il est facile de calculer $d\sigma$ et $d\tau$; on a, par exemple,

$$d\sigma^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = \tfrac{1}{4}[(du + du_0)^2 + (dv + dv_0)^2 + (dw + dw_0)^2].$$

Or

$$du + du_0 = Y\,dZ + Z\,dY + Y_0\,dZ_0 + Z_0\,dY_0$$

ou, en remplaçant les différentielles par leurs valeurs déduites des for-

mules (11) et (11'),

$$du + du_0 = \tfrac{1}{2}(Ve^{i\theta} + V_0 e^{-i\theta})(YY_0 - ZZ_0)\,ds;$$

on trouve de même

$$dv + dv_0 = \frac{i}{2}(Ve^{i\theta} + V_0 e^{-i\theta})(ZY_0 - YZ_0)\,ds,$$

$$dw + dw_0 = \tfrac{1}{2}(Ve^{i\theta} + V_0 e^{-i\theta})(YZ_0 + ZY_0)\,ds$$

et, par suite,

$$d\sigma^2 = \tfrac{1}{16}(Ve^{i\theta} + V_0 e^{-i\theta})^2 (YY_0 + ZZ_0)^2\,ds^2,$$

$$d\sigma = \tfrac{1}{2}(Ve^{i\theta} + V_0 e^{-i\theta})\,ds.$$

On en déduit

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{2}(Ve^{i\theta} + V_0 e^{-i\theta}) = \frac{\cos\theta}{R} - \frac{\sin\theta}{T},$$

et un calcul tout pareil donne

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{2i}(Ve^{i\theta} - V_0 e^{-i\theta}) = \frac{\sin\theta}{R} + \frac{\cos\theta}{T}.$$

Pour que R_1 et T_1 aient les valeurs demandées, il faut et il suffit que l'on prenne $\theta = 0$ dans les formules (11) et (11'). Nous sommes ainsi conduits à la règle définitive suivante :

Soit Y *une intégrale particulière de l'équation* (8) *telle que le rapport* $\frac{1}{V_0 Y}\frac{dY_0}{ds}$ *ne se réduit pas à une constante; on posera*

$$Z = \frac{-2}{V_0}\frac{dY_0}{ds}$$

et l'on multipliera les intégrales Y *et* Z *par un facteur positif, de façon que* $YY_0 + ZZ_0 = 2$. *Cela fait, les neuf cosinus directeurs seront donnés par les formules suivantes :*

$$\alpha = R\left[-\frac{2}{V_0}Y\frac{dY_0}{ds}\right],\quad \beta = \frac{1}{2}R\left[iY^2 + \frac{4i}{V_0^2}\left(\frac{dY_0}{ds}\right)^2\right],\quad \gamma = \frac{1}{2}R\left[Y^2 - \frac{4}{V_0^2}\left(\frac{dY_0}{ds}\right)^2\right],$$

$$\alpha' = R\left[\frac{YY_0 - ZZ_0}{2}\right],\quad \beta' = R\left[\frac{i(ZY_0 - YZ_0)}{2}\right],\quad \gamma' = R\left[\frac{YZ_0 + ZY_0}{2}\right],$$

$$\alpha'' = R\left[\frac{2iY}{V_0}\frac{dY_0}{ds}\right],\quad \beta'' = \frac{1}{2}R\left[Y^2 + \frac{4}{V_0^2}\left(\frac{dY_0}{ds}\right)^2\right],\quad \gamma'' = -\frac{1}{2}R\left[iY^2 - \frac{4i}{V_0^2}\left(\frac{dY_0}{ds}\right)^2\right],$$

le signe R *désignant ici la partie réelle d'une quantité imaginaire.*

6. Pour satisfaire aux équations (9), (10) et (11) de la façon la plus générale, supposons qu'on ait trouvé un premier système de solutions Y et Z. Si nous prenons pour Y l'intégrale $\lambda Y + \mu Z$, nous devrons remplacer Z par

$$-\frac{2}{V_0}\left(\lambda_0 \frac{dY_0}{ds} + \mu_0 \frac{dZ_0}{ds}\right) = -\lambda_0 \frac{2}{V_0}\frac{dY_0}{ds} - \mu_0 \frac{2}{V_0}\frac{dZ_0}{ds},$$

c'est-à-dire par $\lambda_0 Z - \mu_0 Y$. Pour que ces fonctions vérifient l'équation (9), il faudra, en outre, que l'on ait

$$\lambda\lambda_0 + \mu\mu_0 = 1.$$

La solution générale dépendra donc de trois constantes réelles arbitraires. On vérifiera facilement que ces trois constantes arbitraires correspondent à la rotation la plus générale autour de l'origine.

Nous avons complètement négligé jusqu'à présent le signe de R et de T; mais, au point de vue auquel nous nous sommes placés, ce signe est indifférent. On sait, en effet, que la tangente à une courbe gauche et la binormale n'ont pas de *direction* déterminée. Si l'on change la direction de la tangente, cela revient à changer R en — R dans les formules (1) dont nous sommes partis; de même on changera la direction de la binormale en changeant T en — T. On obtiendra donc la même courbe, quel que soit le signe que l'on prenne pour R et T.

7. Les calculs du n° 5 nous montrent que, si l'on prend pour θ une valeur différente de zéro dans les formules (11) et (11)', on obtiendra une courbe gauche, où les rayons de courbure et de torsion ont les valeurs suivantes :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\cos\theta}{R} - \frac{\sin\theta}{T}, \qquad \frac{1}{T_1} = \frac{\sin\theta}{R} + \frac{\cos\theta}{T}.$$

D'ailleurs, l'équation (8) restant la même quand on change V en $Ve^{i\theta}$ et V_0 en $V_0e^{-i\theta}$, il était évident que l'intégration de cette seule équation devait nous fournir toutes ces courbes, outre la courbe cherchée. On peut, du reste, les déduire bien aisément de la première. Les lettres $x, y, z, \alpha, \beta, \ldots$ se rapportant à la courbe C, désignons par les mêmes lettres affectées de l'indice 1 les quantités analogues relatives à la courbe gauche C_1 définie par les équations

$$(12)\qquad \begin{cases} x_1 = x\cos\theta - \sin\theta \int \alpha'' \, ds, \\ y_1 = y\cos\theta - \sin\theta \int \beta'' \, ds, \\ z_1 = z\cos\theta - \sin\theta \int \gamma'' \, ds. \end{cases}$$

On en déduit

$$dx_1 = \cos\theta\, dx - \sin\theta\, \alpha''\, ds = (\alpha\cos\theta - \alpha''\sin\theta)\, ds,$$
$$dy_1 = (\beta\cos\theta - \beta''\sin\theta)\, ds,$$
$$dz_1 = (\gamma\cos\theta - \gamma''\sin\theta)\, ds$$

et, par suite,

$$ds_1 = ds;$$

ce qui prouve que deux arcs correspondants des deux courbes sont égaux. Les formules précédentes pourront alors s'écrire

$$\alpha_1 = \alpha\cos\theta - \alpha''\sin\theta,$$
$$\beta_1 = \beta\cos\theta - \beta''\sin\theta,$$
$$\gamma_1 = \gamma\cos\theta - \gamma''\sin\theta,$$

et une nouvelle différentiation nous donne

$$\frac{\alpha'_1}{R_1} = \frac{\alpha'\cos\theta}{R} - \frac{\alpha'\sin\theta}{T},$$
$$\frac{\beta'_1}{R_1} = \frac{\beta'\cos\theta}{R} - \frac{\beta'\sin\theta}{T},$$
$$\frac{\gamma'_1}{R_1} = \frac{\gamma'\cos\theta}{R} - \frac{\gamma'\sin\theta}{T};$$

en élevant au carré et en ajoutant, il vient

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\cos\theta}{R} - \frac{\sin\theta}{T}, \qquad \alpha'_1 = \alpha', \qquad \beta'_1 = \beta', \qquad \gamma'_1 = \gamma'.$$

Les normales principales aux deux courbes C et C_1 sont parallèles, tandis que la direction de la tangente à la courbe C_1 s'obtient en faisant tourner la tangente à la courbe C d'un angle égal à θ autour de la normale principale. Il est clair que la même rotation appliquée à la binormale de C donnera la direction de la binormale de C_1; on aura donc

$$\alpha''_1 = \alpha\sin\theta + \alpha''\cos\theta,$$
$$\beta''_1 = \beta\sin\theta + \beta''\cos\theta,$$
$$\gamma''_1 = \gamma\sin\theta + \gamma''\cos\theta.$$

On en déduit, en différentiant et faisant la somme des carrés,

$$\frac{1}{T_1} = \frac{\sin\theta}{R} + \frac{\cos\theta}{T}.$$

Je dirai, pour abréger, que toutes les courbes ainsi obtenues sont les *associées* de la courbe C. Si nous prenons, en particulier, $\theta = \frac{\pi}{2}$, nous obtenons une certaine courbe C_2 donnée par les formules

$$x_2 = -\int \alpha'' ds, \qquad y_2 = -\int \beta'' ds, \qquad z_2 = -\int \gamma'' ds;$$

la tangente à C_2 est parallèle à la binormale à C, et inversement; le rayon de courbure de C_2 est égal au rayon de torsion de C et son rayon de torsion est égal au rayon de courbure de C. Il y a donc réciprocité complète entre ces deux courbes (*voir* Beltrami, *Sulle curve a doppia curvatura*). J'appellerai C_2 l'*adjointe* de C. Les courbes associées se déduisent bien facilement des deux adjointes, au moyen des formules

$$\begin{aligned} x_1 &= x\cos\theta + x_2\sin\theta,\\ y_1 &= y\cos\theta + y_2\sin\theta,\\ z_1 &= z\cos\theta + z_2\sin\theta. \end{aligned}$$

Remarquons que la détermination de l'adjointe C_2 exige trois quadratures, mais ne suppose nullement que l'on connaisse l'arc de la courbe primitive.

8. Dans l'équation (8), faisons le changement de variable $s = \varphi(\sigma)$, $\varphi(\sigma)$ désignant une fonction réelle quelconque de la nouvelle variable indépendante σ. On a, d'après les formules pour le changement de variables,

$$\frac{dY}{ds} = \frac{\frac{dY}{d\sigma}}{\varphi(\sigma)}, \qquad \frac{d^2Y}{ds^2} = \frac{\varphi'(\sigma)\frac{d^2Y}{d\sigma^2} - \varphi''(\sigma)\frac{dY}{d\sigma}}{[\varphi'(\sigma)]^3},$$

et la nouvelle équation sera

$$\frac{d^2Y}{d\sigma^2} = \left[\frac{\varphi''(\sigma)}{\varphi'(\sigma)} + \frac{V'}{V}\varphi'(\sigma)\right]\frac{dY}{d\sigma} - \frac{1}{4}VV_0[\varphi'(\sigma)]^2Y.$$

Cette équation est encore de même forme que la première. Soit, en effet, $V = F(s)$, $V_0 = F_0(s)$; si nous posons

$$\mathfrak{P} = F[\varphi(\sigma)]\,\varphi'(\sigma), \qquad \mathfrak{P}_0 = F_0[\varphi(\sigma)]\,\varphi'(\sigma),$$

l'équation précédente pourra s'écrire

$$\frac{d^2Y}{d\sigma^2} = \frac{\varphi'}{\varphi}\frac{dY}{d\sigma} - \frac{1}{4}\varphi\varphi_0 Y.$$

On déduit de là la conclusion suivante. Étant donnée une courbe gauche C, pour laquelle les rayons de courbure et de torsion sont des fonctions connues de l'arc, $R = \pi(s)$, $T = \pi_1(s)$, on peut en déduire par des quadratures une nouvelle courbe gauche C_1, telle que les rayons de courbure et de torsion s'expriment en fonction de l'arc σ de cette courbe par les formules

$$R_1 = \pi[\varphi(\sigma)]\frac{1}{\varphi'(\sigma)}, \qquad T_1 = \pi_1[\varphi(\sigma)]\frac{1}{\varphi'(\sigma)},$$

$\varphi(\sigma)$ désignant une fonction réelle quelconque de σ. Il est facile de le vérifier. Supposons $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ connus en fonction de s, et soit C_1 la courbe gauche définie par les formules

$$x_1 = \int\frac{\alpha\, ds}{\varphi'(\sigma)}, \qquad y_1 = \int\frac{\beta\, ds}{\varphi'(\sigma)}, \qquad z_1 = \int\frac{\gamma\, ds}{\varphi'(\sigma)},$$

où l'on a remplacé partout s par $\varphi(\sigma)$. On aura

$$dx_1 = \frac{\alpha}{\varphi'(\sigma)}ds, \quad dy_1 = \frac{\beta}{\varphi'(\sigma)}ds, \quad dz_1 = \frac{\gamma}{\varphi'(\sigma)}ds, \quad ds_1^2 = d\sigma^2, \quad ds_1 = d\sigma.$$

Faisons correspondre les points des deux courbes pour lesquels les arcs s et σ seront liés par la relation $s = \varphi(\sigma)$; les formules précédentes nous donnent

$$\alpha_1 = \alpha, \qquad \beta_1 = \beta, \qquad \gamma_1 = \gamma,$$

ce qui montre qu'aux points correspondants les tangentes aux deux courbes sont parallèles. On en déduit, en différentiant,

$$\frac{\alpha'_1}{R_1} = \frac{\alpha'}{R}\varphi'(\sigma), \qquad \frac{\beta'_1}{R_1} = \frac{\beta'}{R}\varphi'(\sigma), \qquad \frac{\gamma'_1}{R_1} = \frac{\gamma'}{R}\varphi'(\sigma)$$

et, par suite,

$$R_1 = \frac{R}{\varphi'(\sigma)} = \pi[\varphi(\sigma)]\frac{1}{\varphi'(\sigma)}.$$

Les tangentes aux deux courbes C et C_1 étant parallèles, on sait qu'aux points correspondants les deux courbures sont proportionnelles; on aura

donc

$$\frac{T_1}{T} = \frac{R_1}{R} = \frac{1}{\varphi'(\sigma)};$$

d'où

$$T_1 = \frac{T}{\varphi'(\sigma)} = \pi_1[\varphi(\sigma)]\frac{1}{\varphi'(\sigma)}.$$

Remarque. — Les fonctions $\pi(s)$ et $\pi_1(s)$ étant supposées connues, on peut déterminer la fonction φ par des quadratures, de façon que l'un des deux rayons de courbure de la nouvelle courbe soit une fonction donnée de σ. Par exemple, on pourra calculer φ de façon que R_1 ou T_1 soit constant.

9. L'équation (8) s'intègre immédiatement lorsque R et T sont constants ou lorsque le rapport $\frac{R}{T}$ est constant, et il serait facile d'en déduire les théorèmes classiques de Puiseux et de M. Bertrand sur l'hélice. En général, si R et T sont des fonctions réelles quelconques de s, on ne pourra intégrer l'équation au moyen de quadratures. Voici un cas particulier où l'on pourra effectuer l'intégration. Supposons que V soit de la forme

$$V = A\frac{d\varphi}{ds}e^{i\varphi(s)},$$

$\varphi(s)$ désignant une fonction réelle quelconque, et A une constante réelle; l'équation (8) prend la forme

$$\text{(13)} \qquad \frac{d^2Y}{ds^2} = \left(\frac{\varphi''}{\varphi'} + i\varphi'\right)\frac{dY}{ds} - \frac{1}{4}A^2\varphi'^2 Y.$$

Cherchons si elle admet une intégrale de la forme $e^{ai\varphi(s)}$; nous sommes conduits à l'équation du second degré

$$a^2 - a - \tfrac{1}{4}A^2 = 0.$$

Désignons par a et b les deux racines de cette équation, qui sont réelles et distinctes; l'intégrale générale de l'équation (13) sera

$$Y = Ce^{ai\varphi(s)} + C'e^{bi\varphi(s)}.$$

La forme de V conduit à une interprétation géométrique intéressante; on aura

$$\int V\,ds = \int [illegible] \frac{A}{[illegible]} e^{i\varphi(s)} [illegible] \sigma_0 [illegible] \tau_0;$$

appelons σ et τ les arcs des deux courbes sphériques Σ et Θ. La formule précédente nous donne

$$\sigma + \sqrt{-1}\,\tau = \frac{A}{\sqrt{-1}} e^{\sqrt{-1}\,\varphi(s)} + \sigma_0 + \sqrt{-1}\,\tau_0,$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \sigma - \sigma_0 &= \quad A \sin\varphi(s), \\ \tau - \tau_0 &= - A \cos\varphi(s), \\ (\sigma - \sigma_0)^2 + (\tau - \tau_0)^2 &= A^2. \end{aligned}$$

Soit $m = \frac{A\sqrt{2}}{\sqrt{A^2 + 4a^2}}$; on aura deux intégrales Y et Z vérifiant les conditions (9) et (10) en prenant

$$Y = m e^{ai\varphi}, \qquad Z = -\frac{2ami}{A} e^{bi\varphi},$$

et les valeurs de u, v, w seront les suivantes :

$$u = -\frac{2am^2}{A} i e^{i\varphi}, \qquad v = i\frac{m^2}{2}\left(e^{2ai\varphi} - \frac{4a^2}{A^2} e^{2bi\varphi}\right), \qquad w = \frac{m^2}{2}\left(e^{2ai\varphi} + \frac{4a^2}{A^2} e^{2bi\varphi}\right).$$

On en déduit

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{2am^2}{A} \sin\varphi, \\ \beta &= -\frac{m^2}{2}\left(\sin 2a\varphi - \frac{4a^2}{A^2} \sin 2b\varphi\right), \\ \gamma &= \quad \frac{m^2}{2}\left(\cos 2a\varphi + \frac{4a^2}{A^2} \cos 2b\varphi\right); \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha'' &= -\frac{2am^2}{A} \cos\varphi, \\ \beta'' &= \frac{m^2}{2}\left(\cos 2a\varphi - \frac{4a^2}{A^2} \cos 2b\varphi\right), \\ \gamma'' &= \frac{m^2}{2}\left(\sin 2a\varphi + \frac{4a^2}{A^2} \sin 2b\varphi\right). \end{aligned} \right.$$

On voit que les courbes sphériques Σ et Θ ne dépendent pas de la forme de la fonction φ, mais seulement du nombre A; ces courbes ne changent pas lorsqu'on augmente φ d'une constante réelle, ce qui revient à prendre les images sphériques des courbes associées. Il y a parmi ces courbes une infinité de courbes algébriques, que l'on obtient en prenant A de telle façon que a et b soient commensurables : ce que l'on peut faire d'une infinité de manières. Toutes ces courbes sont unicursales; en désignant par n le dénominateur commun des nombres fractionnaires $2a$ et $2b$, on voit que les coordonnées seront des fonctions rationnelles de $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2n}$.

On obtiendra la courbe C elle-même par les formules

$$x = \int \alpha\, ds, \qquad y = \int \beta\, ds, \qquad z = \int \gamma\, ds;$$

si la fonction φ est quelconque, on ne pourra effectuer l'intégration, mais il est facile de former autant d'exemples qu'on le voudra, où l'on pourra pousser les calculs jusqu'au bout. Supposons a et b commensurables, et α, β, γ exprimés rationnellement en $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2n}$; il suffira de prendre la fonction φ de telle façon que $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2n}$ soit ou une fonction rationnelle de s, ou une fonction trigonométrique ou une fonction uniforme doublement périodique, etc.

On obtiendra, en particulier, des courbes intéressantes en prenant

$$\varphi(s) = \arcsin\frac{s}{a};$$

toutes ces courbes sont à courbure constante, et le rayon de torsion est donné par la formule

$$\frac{1}{T} = \frac{A}{a}\frac{s}{\sqrt{a^2 - s^2}}.$$

10. Le problème traité par M. Hoppe revient à celui-ci : déterminer une courbe sphérique connaissant le rayon de courbure en fonction de l'arc. On a, pour une courbe située sur une sphère de rayon a,

$$R^2 + T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 = a^2;$$

si R est connu, on en déduira T, et l'on sera ramené à un cas particulier de la question qui vient d'être traitée. Mais on peut aussi employer une méthode spéciale, tout à fait analogue à la précédente, qui permet d'éviter les quadratures.

Soient, comme plus haut, Σ et Θ deux courbes sphériques supplémentaires situées sur une sphère dont nous prendrons le rayon pour unité, σ et τ les arcs de ces deux courbes, m et n deux points correspondants sur les deux courbes, x, y, z les coordonnées du point m, x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point n. Aux deux points m et n les tangentes aux deux courbes sont parallèles, ainsi que les plans osculateurs. Soient λ, μ, ν les cosinus directeurs de cette tangente et θ l'angle du plan osculateur avec le rayon Om;

on aura, d'après le théorème de Meunier,

$$R = \cos\theta, \qquad R' = \sin\theta,$$

en désignant par R et R′ les rayons de courbure des deux courbes Σ et Θ. Les cosinus directeurs de la normale principale à la courbe Σ seront donnés par les formules

$$\alpha' = -x\cos\theta - x_1\sin\theta,$$
$$\beta' = -y\cos\theta - y_1\sin\theta,$$
$$\gamma' = -z\cos\theta - z_1\sin\theta,$$

et les formules de Serret nous donnent, dans ce cas,

$$\frac{dx}{d\sigma} = \lambda, \qquad \frac{dx_1}{d\tau} = \lambda, \qquad \frac{d\lambda}{d\sigma} = \frac{\alpha'}{R} = -\frac{x\cos\theta + x_1\sin\theta}{R},$$

et six autres formules analogues. Remplaçons R et $d\tau$ par leurs valeurs; elles deviennent

$$(15) \qquad \frac{dx}{d\sigma} = \lambda, \qquad \frac{d\lambda}{d\sigma} = -x - x_1\operatorname{tang}\theta, \qquad \frac{dx_1}{d\sigma} = \lambda\operatorname{tang}\theta.$$

Ce système est identique au système (1), où l'on aurait fait $R = 1$, $\frac{1}{T} = \operatorname{tang}\theta$. Par conséquent, l'intégration de ce système sera ramenée à la recherche d'une intégrale particulière de l'équation du second ordre

$$(16) \qquad \frac{d^2Y}{d\sigma^2} = \frac{V'}{V}\frac{dY}{d\sigma} - \frac{1}{4}VV_0Y,$$

où

$$V = 1 + i\operatorname{tang}\theta.$$

Tout ce qui a été dit plus haut s'applique sans modification. Comme application, proposons-nous de déterminer les courbes sphériques à torsion constante [*voir* Lacroix, *Cours de Calcul intégral,* t. II, p. 215 (Notes de Serret)]. Il faudra prendre ici $\theta = \frac{\sigma}{a}$, et l'équation précédente sera de la forme

$$\frac{d^2Y}{d\sigma^2} = \frac{2i}{a\left(e^{\frac{2i\sigma}{a}} + 1\right)}\frac{dY}{d\sigma} - \frac{e^{\frac{2i\sigma}{a}}}{\left(e^{\frac{2i\sigma}{a}} + 1\right)^2}Y;$$

faisons le changement de variable

$$e^{\frac{2i\sigma}{a}} = t.$$

Elle devient

$$\frac{2i}{a} t(t+1)^2 \frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{4}{a^2} t(t+1) \frac{dY}{dt} - Y,$$

et il est facile de passer de cette équation à l'équation de la série hypergéométrique.

11. L'équation (16) est identique à l'équation (8), où l'on aurait fait $R = 1$; il suit de là qu'à toute courbe sphérique on peut faire correspondre par des quadratures une courbe gauche à courbure constante. D'un autre côté, si une courbe gauche est à courbure constante ou à torsion constante, entre les deux courbures d'une courbe associée il existe une relation linéaire; ce sont les courbes considérées par M. Bertrand. Par suite, à toute courbe sphérique on peut faire correspondre un faisceau de courbes associées, telles que, pour chacune d'elles, il existe une relation linéaire entre les deux courbures, et l'on obtient ainsi toutes les courbes jouissant de cette dernière propriété. Il est facile d'établir les équations générales de ces courbes. Soient Σ et Θ deux courbes sphériques supplémentaires situées sur une sphère de rayon a ayant pour centre l'origine, x, y, z les coordonnées d'un point de la courbe Σ, x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point correspondant de la courbe Θ, λ, μ, ν les cosinus directeurs de la tangente à chacune de ces courbes, θ l'angle que fait le plan osculateur à la courbe Σ au point x, y, z avec le rayon de la sphère qui aboutit à ce point, σ l'arc de la courbe Σ. Les équations (15) seront remplacées par les suivantes :

$$(17) \qquad \frac{dx}{d\sigma} = \lambda, \qquad \frac{dx_1}{d\sigma} = \lambda \operatorname{tang}\theta, \qquad \frac{d\lambda}{d\sigma} = -\frac{x + x_1 \operatorname{tang}\theta}{a^2}$$

et par deux groupes d'équations analogues. Cela posé, considérons la courbe gauche C représentée par les équations

$$(18) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int (x\cos\omega - x_1 \sin\omega)\, d\sigma, \\ Y = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int (y\cos\omega - y_1 \sin\omega)\, d\sigma, \\ Z = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int (z\cos\omega - z_1 \sin\omega)\, d\sigma, \end{cases}$$

où ω désigne une constante quelconque. On en tire

$$dX = \frac{1}{a}(x\cos\omega - x_1\sin\omega)\,d\sigma,$$

$$dY = \frac{1}{a}(y\cos\omega - y_1\sin\omega)\,d\sigma,$$

$$dZ = \frac{1}{a}(z\cos\omega - z_1\sin\omega)\,d\sigma$$

et, par suite,

$$ds = d\sigma, \qquad \text{d'où} \qquad s = \sigma.$$

Les formules précédentes peuvent donc s'écrire

$$\alpha = \frac{1}{a}(x\cos\omega - x_1\sin\omega),$$

$$\beta = \frac{1}{a}(y\cos\omega - y_1\sin\omega),$$

$$\gamma = \frac{1}{a}(z\cos\omega - z_1\sin\omega),$$

et les formules de Serret, jointes aux formules (17), donnent

$$\frac{\alpha'}{R} = \frac{\lambda}{a}(\cos\omega - \sin\omega\,\mathrm{tang}\,\theta),$$

$$\frac{\beta'}{R} = \frac{\mu}{a}(\cos\omega - \sin\omega\,\mathrm{tang}\,\theta),$$

$$\frac{\gamma'}{R} = \frac{\nu}{a}(\cos\omega - \sin\omega\,\mathrm{tang}\,\theta).$$

On en déduit

$$(19) \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{a}(\cos\omega - \sin\omega\,\mathrm{tang}\,\theta), \qquad \alpha' = \lambda, \qquad \beta' = \mu, \qquad \gamma' = \nu.$$

D'autre part, les formules de Serret donnent

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = \left(\frac{d\alpha'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma'}{ds}\right)^2$$

et, par suite,

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = \frac{1}{a^2}(1 + \mathrm{tang}^2\theta);$$

il en résulte

(20) $$\frac{1}{T} = \frac{1}{a}(\sin\omega + \cos\omega \tang\theta).$$

On pourrait encore établir cette formule en remarquant que les valeurs de α, β, γ, α', β', γ' donnent

$$\alpha'' = \frac{1}{a}(x \sin\omega + x_1 \cos\omega),$$

$$\beta'' = \frac{1}{a}(y \sin\omega + y_1 \cos\omega),$$

$$\gamma'' = \frac{1}{a}(z \sin\omega + z_1 \cos\omega)$$

et en opérant comme plus haut. Des valeurs de R et de T on déduit

(21) $$\frac{\cos\omega}{R} + \frac{\sin\omega}{T} = \frac{1}{a}.$$

Si l'on prend $\omega = 0$, on aura une courbe à courbure constante; pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, on aura une courbe à torsion constante. Nous voyons, de plus, que les équations (18) représentent toutes les courbes qui jouissent de la propriété exprimée par l'équation (21).

12. La combinaison qui nous a conduit à l'équation (8) n'est pas la seule que l'on puisse employer. On en aperçoit immédiatement deux autres conduisant à deux équations analogues du second ordre, qui peuvent être utiles dans certains cas. Posons

$$u = \alpha + \alpha'\sqrt{-1}, \quad u_0 = \alpha - \alpha'\sqrt{-1}, \qquad \frac{1}{R} = r, \qquad \frac{1}{T} = t;$$

le système (1) peut être remplacé par le suivant :

$$\frac{du}{ds} = -iru - it\alpha'', \qquad \frac{du_0}{ds} = iru_0 + it\alpha'', \qquad \frac{d\alpha''}{ds} = t\frac{u - u_0}{2i}.$$

L'élimination de u_0 et de α'' conduit à l'équation du troisième ordre en u

(22) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^3u}{ds^3} - \frac{3t'}{t}\frac{d^2u}{ds^2} + \left[3\left(\frac{t'}{t}\right)^2 + r^2 + t^2 - \frac{t''}{t} + 2i\frac{t'r - tr'}{t}\right]\frac{du}{ds} \\ &\qquad + \left[i\frac{t''r - tr''}{t} + \left(r + 3i\frac{t'}{t}\right)\left(\frac{tr' - t'r}{t}\right)\right]u, \end{aligned}\right.$$

qui se ramène elle-même à l'équation du second ordre

$$(23) \qquad \frac{d^2Y}{ds^2} = \frac{t'}{t}\frac{dY}{ds} - \frac{1}{4}\left(r^2 + t^2 + 2i\frac{t'r - tr'}{t}\right)Y.$$

De même, en faisant la combinaison $u = \alpha'' + \alpha'\sqrt{-1}$, on serait conduit à une équation analogue à la précédente

$$(24) \qquad \frac{d^2Y}{ds^2} = \frac{r'}{r}\frac{dY}{ds} - \frac{1}{4}\left(r^2 + t^2 + 2i\frac{tr' - t'r}{r}\right)Y.$$

Il nous reste à examiner comment on devra choisir les intégrales particulières de l'une de ces deux équations pour obtenir une courbe gauche répondant à la question. Soit

$$u = \alpha + \alpha'\sqrt{-1}, \qquad v = \beta + \beta'\sqrt{-1}, \qquad w = \gamma + \gamma'\sqrt{-1};$$

on aura, en désignant par Y et Z deux intégrales linéairement indépendantes de l'équation (23),

$$(25) \qquad \left\{\begin{array}{lll} u = YZ, & v = \frac{i}{2}(Y^2 + Z^2), & w = \frac{1}{2}(Y^2 - Z^2), \\ \alpha = \frac{u + u_0}{2}, & \beta = \frac{v + v_0}{2}, & \gamma = \frac{w + w_0}{2}, \\ \alpha' = \frac{u - u_0}{2i}, & \beta' = \frac{v - v_0}{2i}, & \gamma' = \frac{w - w_0}{2i}. \end{array}\right.$$

Les équations de condition

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1, \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0, \\ \alpha\frac{d\alpha'}{ds} + \beta\frac{d\beta'}{ds} + \gamma\frac{d\gamma'}{ds} &= -r \end{aligned}$$

donnent, en tenant compte des relations $u^2 + v^2 + w^2 = 0$, $u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 = 0$,

$$\begin{aligned} uu_0 + vv_0 + ww_0 &= 2, \\ u\,du_0 + v\,dv_0 + w\,dw_0 &= 2ir\,ds. \end{aligned}$$

Remplaçons u, v, w, u_0, v_0, w_0 par leurs valeurs; il vient

$$(26) \qquad YY_0 + ZZ_0 = 2,$$

$$(27) \qquad Y\frac{dY_0}{ds} + Z\frac{dZ_0}{ds} = ri.$$

De l'équation (27) on déduit, en prenant les quantités conjuguées,

$$(27') \qquad Y_0\frac{dY}{ds} + Z_0\frac{dZ}{ds} = -ri$$

et, par suite,

$$d(YY_0 + ZZ_0) = 0$$

ou

$$YY_0 + ZZ_0 = K.$$

Les fonctions Y et Z étant des intégrales de l'équation (23), on aura

$$Y\frac{dZ}{ds} - Z\frac{dY}{ds} = Ct,$$

$$Y_0\frac{dZ_0}{ds} - Z_0\frac{dY_0}{ds} = C_0 t.$$

Comparons ces deux équations aux équations (27) et (27'); nous en déduisons

$$(28) \qquad \begin{cases} 2\dfrac{dY}{ds} = -riY - CtZ_0, \\ 2\dfrac{dZ_0}{ds} = \quad riZ_0 + C_0 tY; \end{cases}$$

$$(28') \qquad \begin{cases} 2\dfrac{dY_0}{ds} = \quad riY_0 - C_0 tZ, \\ 2\dfrac{dZ}{ds} = -riZ + CtY_0. \end{cases}$$

Par un calcul tout à fait semblable aux précédents, on trouve qu'il faudra prendre $C = i$, $C_0 = -i$; les équations précédentes deviennent alors

$$(29) \qquad \begin{cases} 2\dfrac{dY}{ds} = -riY - itZ_0, \\ 2\dfrac{dZ_0}{ds} = \quad riZ_0 - itY; \end{cases}$$

$$(29') \qquad \begin{cases} 2\dfrac{dY_0}{ds} = \quad riY_0 + itZ, \\ 2\dfrac{dZ}{ds} = -riZ + itY_0. \end{cases}$$

Soit Y une intégrale particulière de l'équation (23); on tire des relations précédentes

$$Z = -\frac{i}{t}\left(2\frac{dY_0}{ds} - riY_0\right);$$

ce qui prouve que $2\frac{dY_0}{ds} - riY_0$ sera aussi une intégrale de la même équation, fait que l'on peut vérifier directement. Supposons que ces deux intégrales soient distinctes. Des équations (29) et (29') on déduit

$$d(YY_0 + ZZ_0) = 0,$$
$$YY_0 + ZZ_0 = K;$$

on peut évidemment supposer $K = 2$, et les mêmes équations donnent alors

$$Y\frac{dY_0}{ds} + Z\frac{dZ_0}{ds} = ri.$$

Les intégrales Y et Z étant choisies de cette façon, les formules (25) donnent α, β, γ, α', β', γ', et la courbe représentée par les équations

$$x = \int \alpha\, ds, \qquad y = \int \beta\, ds, \qquad z = \int \gamma\, ds$$

satisfait à toutes les conditions du problème.

SPECTRES D'ABSORPTION

DES

CHROMATES ALCALINS ET DE L'ACIDE CHROMIQUE,

PAR M. PAUL SABATIER,

Professeur de Chimie à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Les solutions ou les cristaux de bichromate de potasse, interposés sur le trajet d'un rayon de lumière blanche, absorbent énergiquement les radiations les plus réfrangibles. Le rouge et le jaune passent à peu près complètement; au contraire, même pour une faible épaisseur de l'absorbant, le violet et le bleu manquent à peu près totalement, le spectre se trouvant limité dans le vert au voisinage de la longueur d'onde 545 (millionièmes de millimètre).

L'acide chromique se comporte de même. Pour les chromates neutres alcalins, l'absorption qui paraît s'exercer de part et d'autre du spectre, quoique principalement vers le violet, n'atteint pas les rayons verts, l'extinction ne survenant guère, pour des épaisseurs moyennes, que pour des longueurs d'onde inférieures à 490.

Mode d'observation. — Pour évaluer les absorptions relatives aux diverses radiations, je me suis servi du spectrophotomètre de M. Crova (*Ann. de Chim. et de Phys.*, 5e série, t. XXIX, p. 556; 1883). L'appareil a été soigneusement gradué à l'aide de raies spectrales connues, selon les indications de M. Lecoq de Boisbaudran (*Spectres lumineux*, p. 21). J'ai employé celles qui suivent :

	λ.
K	768, rouge.
»	404, violette.
Li	670, rouge.
Na	589, jaune.
Cœ	621,9, orangée.
»	601, id.

	λ.
Cœ........................	566-564, vertes.
»	459,7-456, bleues.
Tl........................	535, verte.
Ca........................	422,6, violette.
St........................	460,7, bleue.
In........................	451, bleue.
H........................	656, rouge.
»........................	486, bleue.

L'observation attentive de ces raies m'a servi à repérer les positions du vernier micrométrique, et les résultats reportés graphiquement ont donné une courbe continue parfaitement régulière.

J'insisterai en passant sur la nécessité de donner le plus grand soin à la construction du vernier qui, à cette condition, remplace avantageusement le micromètre latéral à réflexion des spectroscopes ordinaires.

J'ai employé, pour l'observation des liquides à étudier, un dispositif spécial très commode, et dont j'ai emprunté le mécanisme aux colorimètres industriels.

La liqueur est placée dans un cylindre vertical C en cristal, fermé à sa partie inférieure par une glace horizontale bien travaillée. Un piston cylindrique P de cristal très limpide, ayant le même axe que le cylindre à liquide, peut plonger dans ce dernier, grâce à un pignon denté K : la position du piston est indiquée à chaque instant par un vernier mobile le long d'une échelle divisée en millimètres, dont le zéro correspond au contact de la base du piston avec le fond plan du cylindre. On peut ainsi à volonté intercepter entre la glace et le piston transparent une colonne liquide de hauteur déterminée [1].

Les rayons issus d'un bec Bengel A (*fig.* 1) arrivent horizontalement sur un miroir ou sur un prisme à réflexion totale M qui les renvoie verticalement sur le cylindre où ils traversent la glace de fond, le liquide et le piston

---

[1] En vue d'une série de recherches spectrophotométriques qui sont en cours d'exécution, j'ai fait subir à cet appareil une modification assez importante. Le piston plongeur en cristal plein est remplacé par un cylindre creux mobile, semblable au cylindre extérieur, ayant même axe, mais un diamètre environ deux fois plus petit. Il est de même obturé à sa partie inférieure par une glace à faces bien parallèles.

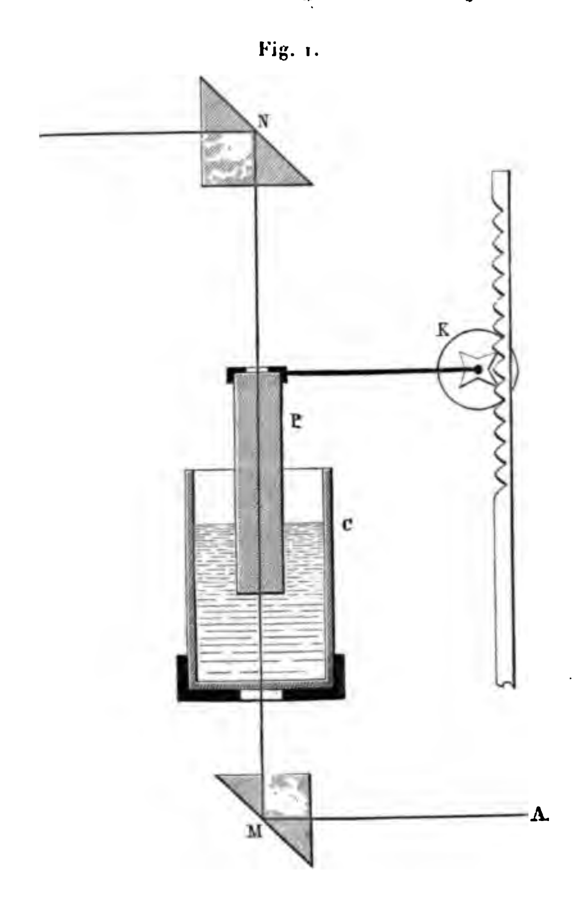
Cette disposition permet de maintenir constante l'épaisseur liquide traversée par la lumière, tout en faisant varier sa nature : par exemple, le cylindre extérieur reçoit une dissolution d'un sel coloré, le cylindre intérieur contenant seulement du dissolvant.

La hauteur effective des cylindres est 250^{mm}.

plongeur. Un second prisme à réflexion totale N les dirige horizontalement sur la branche directe du spectrophotomètre.

Un second bec Bengel, convenablement diaphragmé, est disposé latéralement vis-à-vis de l'appareil à nicols mesureur d'intensité. Les deux Bengel se rattachent à une même conduite de gaz sur le trajet de laquelle se trouve

Fig. 1.



un régulateur de pression : on évite ainsi les soubresauts dus à des variations brusques du débit dans la conduite. Quant aux variations lentes de pression, elles étaient négligeables pendant le jour, c'est-à-dire aux heures où la consommation urbaine était faible et régulière. Aux heures crépusculaires, la variation de pression à l'usine et de consommation devient au contraire énorme et m'a obligé à alimenter les lampes exclusivement avec des gazomètres de laboratoire.

Le spectrophotomètre étant réglé à l'ordinaire, le nicol au zéro, la fente oculaire fixée à une largeur convenable, on introduit dans l'appareil à

liquides de l'eau pure limpide, en hauteur égale à la hauteur qu'on veut donner au liquide à étudier ([1]). On s'arrange de manière à obtenir l'égalité lumineuse des deux spectres. Ce réglage est assez facile à réaliser si l'intensité du spectre latéral est plus grande tout d'abord : il suffit de diminuer par un mouvement lent de vis l'accès du gaz dans le bec correspondant.

Les lumières étant semblables, si l'égalité est atteinte pour une couleur, elle l'est aussi pour toutes les autres. Pour des intensités assez vives, il vaut mieux effectuer le réglage dans les portions moins brillantes du spectre, c'est-à-dire dans le bleu ou le vert : le *vert* m'a paru réunir tout à la fois les avantages d'une moindre fatigue de l'œil et d'une sensibilité plus grande.

Néanmoins, l'égalisation initiale des deux lumières demeure une opération fort délicate : le plus souvent, on n'arrive qu'à une égalité approchée, et il en résulte une erreur légère, d'ailleurs systématique, qui diminue ou accroît tous les résultats dans une même série de mesures. Ces erreurs se produisant tantôt au détriment, tantôt au profit de la lumière directe, seront évidemment éliminées si l'on prend la moyenne des valeurs fournies par de nombreuses expériences ([2]).

Le liquide coloré étant placé dans la cuve cylindrique, on règle à l'aide du pignon l'épaisseur traversée par les rayons; puis on amène le vernier circulaire à une division choisie pour laquelle la table ou la courbe de l'appareil font connaître la longueur d'onde du rayon qui tombe sur la fente oculaire. Une absorption plus ou moins énergique s'exerce sur le spectre direct. Il faut tourner le nicol sur le cercle divisé, de manière à obtenir l'égalité des deux lumières. Si ω est l'angle de rotation, nous aurons, en désignant par I_λ l'intensité initiale, par I'_λ l'intensité transmise après l'absorption,

$$I'_\lambda = I_\lambda \cos^2\omega;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{I'_\lambda}{I_\lambda} = \cos^2\omega,$$

rapport qui donne la proportion de lumière transmise pour la longueur d'onde λ.

([1]) Cette précaution n'est pas d'une nécessité absolue, l'eau pure bien filtrée en épaisseur faible ne produisant qu'une absorption très petite.

([2]) On atteint plus de précision quand on opère avec une fente (objectif) très étroite donnant un faible éclairement; mais un tel point de départ ne saurait convenir dans le cas de liqueurs à pouvoir très absorbant.

Il importe de vérifier de temps à autre le zéro de l'appareil, c'est-à-dire l'égalité des deux spectres en dehors de toute absorption. On arrive plus pratiquement au même but en intercalant dans une série continue de mesures plusieurs observations d'une même radiation : la valeur trouvée pour ω doit être toujours la même.

Calcul des coefficients de transmission. — On admet que la loi théorique de transmission d'une radiation à travers un milieu absorbant d'épaisseur e s'exprime par la relation

$$I' = I\alpha^e,$$

I étant l'intensité transmise sans absorption, I' l'intensité réduite par l'absorption, α étant une fraction qu'on appelle *coefficient de transmission*. Ce coefficient varie avec la longueur d'onde du rayon considéré. Il est évident que, pour un même corps absorbant, il change avec la concentration. Pour rendre comparables entre elles les mesures de ces coefficients, il faut rapporter à des unités convenablement choisies.

J'ai choisi comme concentration normale celle d'une liqueur renfermant par litre $1^{éq}$ d'acide chromique $CrO^3 = 50^{gr},2$, sous n'importe quel état, acide libre, chromate neutre ou bichromate. L'unité d'épaisseur sera le centimètre. En prenant une telle liqueur, on obtiendra immédiatement la valeur des coefficients de transmission en opérant sur une épaisseur de 1^{cm}; on y arrivera de même par un calcul très simple, pour une épaisseur quelconque connue

$$\alpha^e = \frac{I'}{I} = \cos^2\omega;$$

d'où

$$\log\alpha = \frac{2\log\cos\omega}{e}.$$

Pour des liqueurs de concentration différente, l'absorption mesurée change et ne dépend évidemment que de la masse du chromate ou d'acide chromique placée sur le trajet du rayon ([1]). Donc, pourvu que le dissolvant n'introduise aucun changement chimique dans l'état du corps dissous, une certaine épaisseur e d'un liquide contenant $1^{éq}$ dans n litres exercera la

(1) Les pertes de lumière dues aux réflexions et à la traversée du dissolvant n'interviennent d'aucune façon; car le réglage ayant eu lieu en présence d'une même épaisseur du dissolvant, I et I' sont diminuées dans une même proportion.

même absorption qu'une épaisseur $\frac{e}{n}$ de liqueur normale. La formule générale sera donc

$$I = I\alpha^{\frac{e}{n}}.$$

e étant l'épaisseur traversée (exprimée en centimètres), n étant le nombre de litres occupés par 1éq d'acide chromique sous n'importe quel état.

Acide chromique. — Les mesures ont été faites pour des épaisseurs de 1 et 2cm avec des solutions contenant par litre $\frac{15}{19}$, $\frac{30}{19}$, 1éq d'acide chromique.

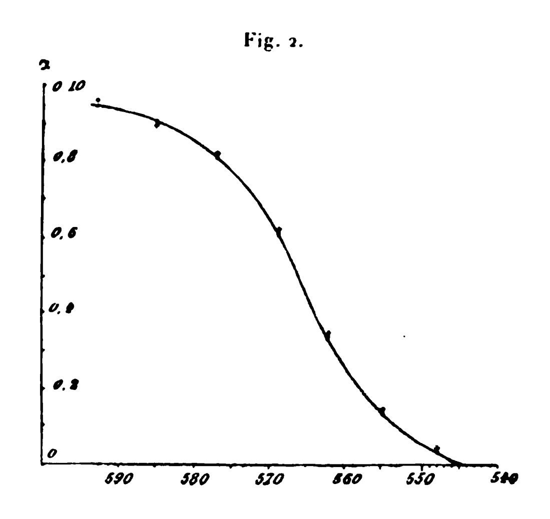
J'ai ainsi trouvé pour les coefficients de transmission (moyenne de cinq expériences) :

λ.	α.
548	0,025
555	0,137
562	0,34
569	0,623
577	0,815
585	0,905
593	0,945

Les rayons rouges sont transmis sans perte appréciable.

La dilution n'a aucune influence. En prenant pour abscisses les longueurs d'onde et pour ordonnées les valeurs de α obtenues plus haut, on trouve qu'elles forment une courbe régulière [*fig.* 2 (1)] :

Fig. 2.



(1) Les croix indiquent les valeurs données par le bichromate de potasse.

Bichromate de potasse. — La dissolution normale renferme par litre $\frac{1}{2}$ équivalent du sel, soit $\frac{1}{2}$ K $Cr^2O^7 = 73^{gr},7$.

La formule de transmission pourra être écrite

$$I' = I\beta^{\frac{2e}{m}},$$

m étant le nombre de litres occupés par $1^{éq}$ de bichromate, soit $147^{gr},4$.

Les expériences ont été faites pour des épaisseurs comprises entre 1 et 4^{cm} sur les dissolutions ayant par litre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ d'équivalent de bichromate. Leurs résultats et aussi des comparaisons directes ont montré que la dilution n'exerce aucune influence sur la loi de transmission par le bichromate. Voici les moyennes de quinze expériences :

λ.	β.
548	0,03
555	0,15
562	0,35
569	0,63
577	0,82
585	0,894
593	0,955

La loi de l'épaisseur est vérifiée par la concordance des valeurs issues d'expériences distinctes.

Puisque la dilution ne change rien au phénomène, il y a tout lieu de croire que les coefficients sont les mêmes pour le bichromate cristallisé. J'ai vérifié cette conclusion sur deux lames de bichromate provenant des ateliers de Laurent. Leurs épaisseurs étaient $0^{cm},024$ et $0^{cm},027$. Dans la formule de transmission, on a

$$m = \frac{0,1474}{2,7} = 0,0546,$$

2,7 étant la densité des cristaux de bichromate; l'expression devient

$$I' = I\beta^{\frac{2e}{0,0546}}.$$

J'ai trouvé ainsi

λ.	β.
548	0,024
555	0,143
562	0,36
569	0,63

valeurs très concordantes avec celles qu'ont données les dissolutions de bichromate.

Si l'on compare les coefficients que nous venons de trouver à ceux de l'acide chromique, nous remarquons qu'ils sont sensiblement identiques. On peut s'en assurer en repérant sur la courbe de la *fig.* 2 les résultats fournis par le bichromate de potasse; les points correspondants sont sensiblement confondus avec la courbe. J'en conclus à l'identité rigoureuse des deux spectres.

J'ai vérifié ce résultat par une expérience directe en disposant dans le cylindre vertical un volume quelconque d'acide chromique, puis ajoutant par portions successives moins de 1éq de potasse : on constate que le spectre d'absorption demeure identique. *Donc le bichromate de potasse absorbe comme l'acide chromique qu'il contient.*

Les dissolutions de *bichromate d'ammoniaque* ont les mêmes coefficients de transmission que le bichromate de potasse. J'ai trouvé :

λ.	β'.
548	0,04
555	0,16
562	0,36
569	0,64
577	0,82
585	0,91

C'est toujours le spectre d'absorption de l'acide chromique.

La chute de lumière y est extrêmement rapide du côté du vert, le bleu et le violet subissant une extinction à peu près totale. J'ai tenté d'évaluer la valeur très petite de quelques coefficients de transmission pour les rayons bleus, en opérant sur une liqueur très diluée ne contenant par litre que $\frac{1}{200}$ d'équivalent [1].

La formule donne

$$\frac{I'}{I} = \cos^2\omega = \beta^{\frac{2c}{200}} = \beta^{\frac{c}{100}},$$

d'où

$$\log\beta = \frac{200 \log\cos\omega}{c}.$$

---

[1] Une telle dissolution est jaune orangé, assez semblable aux dissolutions de chromate neutre.

J'ai ainsi trouvé pour β des valeurs extrêmement petites; j'en citerai deux parmi les plus grandes :

Pour $\lambda = 518$, j'ai obtenu $\beta = 0,000013$,
$\lambda = 524$, » $\beta = 0,00377$.

On peut donc admettre sans erreur sensible que, sous une épaisseur même petite, le bichromate arrête toute radiation plus réfrangible que $\lambda = 518$ millièmes de μ.

Chromate neutre de potasse. — La dissolution normale renferme par litre $1^{éq}$, soit $KCrO^4 = 97^{gr},2$.

J'ai opéré sur des épaisseurs comprises entre 0,5 et 5^{cm}, pour des dissolutions tenant par litre $1^{éq}$ et $2^{éq}$ de chromate neutre. La loi de l'épaisseur s'est trouvée sensiblement vérifiée, les valeurs obtenues pour les coefficients γ étant fort voisines pour les diverses épaisseurs. J'indique ci-dessous les résultats moyens pour les deux concentrations; les expériences ont été faites au voisinage de 20° :

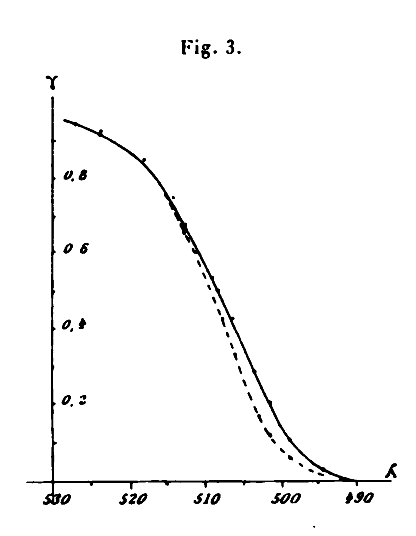
λ.	$2^{éq} = 1^{lit}$.	$1^{éq} = 1^{lit}$.
494	0,024	»
499	0,108	0,06
501	0,207	0,12
503	0,298	0,18
506	0,437	0,325
508	0,505	0,44
509	0,54	»
511	0,613	»
513	0,69	0,69
514	0,741	»
516	0,798	»
518	0,845	0,85
521	0,91	»
524	0,935	0,92
528	0,947	0,955

En prenant pour abscisses les longueurs d'onde et pour ordonnées les coefficients de transmission, on forme, pour chaque série, une courbe régulière. La courbe pleine (*fig.* 3) correspond à la concentration $2^{éq} = 1^{lit}$; la courbe ponctuée se rapporte à une dilution deux fois plus grande.

Les deux courbes ne sont pas tout à fait confondues. La dilution a pour effet de diminuer les coefficients de transmission, principalement pour les

longueurs d'onde les plus courtes. C'est assurément l'indice d'une légère dissociation du chromate neutre en bichromate et alcali libre, le bichromate

Fig. 3.



formé exerçant une absorption énergique sur les rayons les plus réfrangibles.

L'addition d'un excès de potasse aux solutions de chromate neutre empêche cette dissociation et relève un peu toute la courbe, en accusant pour la liqueur une teinte générale plus verdâtre. Toutefois les différences ainsi introduites peuvent être considérées comme négligeables.

Mélanges de chromate neutre et de bichromate. — Soit une radiation simple traversant un mélange de chromate neutre et de bichromate de potasse dissous dans l'eau à concentration normale (1^{lit} contient $1^{\text{éq}}$ d'acide chromique); soient p la proportion d'acide chromique contenue à l'état de chromate neutre, q celle qui s'y trouve à l'état de bichromate; l'absorption exercée sera la même que si le rayon traversait successivement les deux liquides superposés en deux couches, au lieu d'être mélangés. Donc, si E est l'épaisseur traversée, nous aurons

$$I' = I\gamma^{\frac{pE}{p+q}}\beta^{\frac{qE}{p+q}} \qquad (p+q=1);$$

γ et β étant connus, on pourra, à l'aide de cette formule, déterminer I' si l'on se donne p et q, ou bien $\frac{p}{q}$ si l'on mesure directement le rapport $\frac{I'}{I}$. Il serait donc facile de déterminer au spectrophotomètre la composition d'un

mélange de chromate et de bichromate. Malheureusement, si l'on compare les spectres d'absorption des deux sels, on reconnaît qu'une telle opération serait loin d'être pratique. La région sensible d'absorption (pour les concentrations normales) est comprise, pour le chromate neutre, entre les longueurs d'onde 525-494; pour le bichromate, entre 590-545. Avec des radiations plus réfrangibles que 545, l'absorption exercée par le bichromate est extrêmement intense, le coefficient β est très voisin de zéro et sa mesure ne peut être effectuée avec précision.

La seule méthode possible consisterait donc à faire sur une série de mélanges connus des mesures directes de transmission. J'en ai fait un assez grand nombre, qui donnent des courbes allongées intermédiaires entre celles du chromate neutre et du bichromate. Pour en donner une idée, j'inscrirai les valeurs des quantités de lumière transmises à travers 1^cm de solutions normales :

λ.	$p = 0{,}99$.	$p = 0{,}96$.	$p = 0{,}90$.
499	0,03	»	»
503	0,08	»	»
508	0,18	0,05	»
513	0,41	0,14	0,03
518	0,64	0,28	0,11
524	0,79	0,50	0,27
535	0,91	0,72	0,57

On pourrait ainsi établir une Table des transmissions pour des mélanges qui varient progressivement; mais la nécessité de multiplier les expériences pour chacune des déterminations rendrait très fastidieuse une telle série de recherches.

SUR LA

FORME DES COURBES A TORSION CONSTANTE,

PAR M. G. KŒNIGS,

Ancien élève de l'École Normale,
Chargé de cours d'Analyse à la Faculté des Sciences de Toulouse.

I. — *Une transformation des contours gauches.*

1. Soit C un contour de l'espace formé d'une courbe analytique ou d'un nombre fini d'arcs de courbes analytiques; soit aussi un point donné O dans l'espace. Je fixe un sens de parcours sur le contour; alors toute portion du contour C possédera, par cela seul, un sens de parcours parfaitement défini, et la corde qui fermera cette portion de contour, ou en sera la somme géométrique, ou sera un segment déterminé non seulement en grandeur et orientation, mais même en direction. Prenons, en particulier, un arc infiniment petit MM'; la corde $\overline{MM'}$ de cet arc est un segment infiniment petit parfaitement déterminé, dont le moment par rapport au point O se représentera aussi par un segment $\{MM'\}$ infiniment petit.

Je transporte ce segment $\{MM'\}$ en un point m de l'espace, de sorte qu'il ait m pour origine, et j'appelle m' son extrémité. Je considère ensuite un point M'' infiniment voisin de M' sur le contour C, et, traitant l'arc M'M'' comme j'ai traité l'arc MM', je construis le segment $\{M'M''\}$ analogue à $\{MM'\}$, puis je le transporte en m', de sorte qu'il ait m' pour origine, et j'appelle m'' son extrémité, et ainsi de suite.

Lorsque l'on parcourt ainsi tout le contour C, la suite des points m, m', m'', ..., dont le premier seul est arbitraire, constitue un nouveau contour Γ, et c'est ce contour que je considère comme le transformé du contour C.

Les deux contours C et Γ se correspondent, par définition, de telle manière qu'à deux points M, M' infiniment voisins pris sur C correspondent sur Γ deux points infiniment voisins m et m', et la corde ou l'arc infiniment

petit mm' représente le moment de la corde ou de l'arc MM' par rapport au point fixe.

Rien n'empêcherait, pour sauvegarder l'homogénéité, de prendre mm' égal non pas au moment, mais au rapport de ce moment à une longueur constante k.

II. — *Usage du contour transformé pour la représentation des aires.*

2. Considérons le triangle infiniment petit formé par l'arc infiniment petit MM' et les vecteurs OM, OM'. Le segment $\{MM'\}$ représente en grandeur le double de l'aire de ce triangle, et, pour avoir l'aire de la projection du même triangle sur un plan Π, il suffit de prendre la demi-projection du segment $\{MM'\}$ sur une droite perpendiculaire au plan Π.

On peut donc dire que l'arc $\overline{mm'}$ du contour Γ représente en grandeur et direction l'aire du triangle correspondant OMM'.

3. Cette propriété s'étend aux quantités finies.

Soit, en effet, une portion du contour C limitée par deux points A et B. En joignant A et B au point O, on forme un contour fermé OABO, dont la projection sur un plan Π quelconque a une aire parfaitement déterminée en grandeur et en signe, attendu qu'un sens de parcours se trouve défini sur le contour OABO.

Décomposons la portion AB du contour C en éléments MM' infiniment petits. L'aire de la projection de OABO sera la somme algébrique des aires des projections des triangles élémentaires OMM'; elle sera donc égale à la demi-somme algébrique des projections des segments $\{MM'\}$ sur une perpendiculaire au plan de projection Π. Par conséquent, on obtiendra l'aire de la projection du contour OABO en projetant sur une perpendiculaire au plan Π la demi-somme géométrique des segments $\{MM'\}$. Mais le contour Γ nous fournit cette somme géométrique. Soient, en effet, a et b les points de ce contour qui correspondent à A et à B; le segment $\overline{ab}$ est la somme géométrique dont il vient d'être question.

De là la proposition suivante :

Pour avoir l'aire de la projection sur un plan Π *du contour fermé formé par une portion* AB *du contour* C *et les vecteurs* OA, OB, *il suffit*

de prendre la demi-projection sur une perpendiculaire à Π *de la corde ab relative à la portion correspondante du contour* Γ.

III. — *Examen du cas où le contour initial est fermé.*

4. Lorsque le contour C est fermé et que l'on prend pour AB le contour C décrit une fois, les points A et B se confondent, et l'aire de la projection du contour OABO n'est autre que celle de la projection du contour C lui-même, c'est-à-dire qu'elle est entièrement indépendante du point O.

Généralement, le contour C n'aura pas une aire de projection nulle sur tous les plans de l'espace; le segment ab ne sera donc pas nul, mais il aura une grandeur, une orientation et une direction parfaitement déterminées *et indépendantes du point* O.

Appelons ici ce segment $\overline{ab}$ l'*axe du contour fermé* C.

On voit tout de suite que, *pour avoir l'aire de la projection d'un contour fermé sur un plan quelconque, il suffit de prendre la demi-projection sur une perpendiculaire à ce plan de l'axe du contour*.

Sur les plans normaux à cet axe, la projection a une aire maximum; l'aire est nulle pour les plans parallèles à l'axe.

Enfin il pourrait arriver que le contour eût une aire de projection nulle sur tous les plans de l'espace : il faut et il suffit, pour cela, que l'axe du contour soit nul.

5. Voyons les conséquences de ces diverses hypothèses pour le contour transformé Γ.

Supposons d'abord que l'axe du contour fermé C ne soit pas nul, et représentons-le par $\{C\}$. Si, partant d'un point quelconque A du contour C, on revient en A après un tour, le point transformé décrit une portion ab du contour transformé Γ, telle que le segment $\overline{ab}$ soit égal et parallèle au segment $\{C\}$. On en conclut que, si l'on fait subir à un point quelconque du contour Γ une translation égale et parallèle à $\{C\}$, on obtient un nouveau point de ce contour, c'est-à-dire que :

Le contour Γ *est périodique; il se superpose à lui-même par une translation égale et parallèle à l'axe* $\{C\}$ *du contour.*

Le contour Γ est donc situé sur une surface cylindrique (composée de

cylindres analytiques) parallèle à l'axe du contour C, et la section droite de ce cylindre est nécessairement un contour plan fermé. Chaque génératrice rectiligne de la surface cylindrique est rencontrée par le contour à des intervalles dont la longueur est précisément celle de l'axe du contour C.

6. Supposons, au contraire, que le contour C ait une aire de projection nulle sur tous les plans de l'espace, alors son axe est nul, et le contour Γ est fermé.

En résumé, on voit que :

Le contour transformé d'un contour fermé est périodique ou fermé.

IV. — *Propriétés de la courbe transformée d'une courbe analytique.*

7. Considérons une courbe unique C, et appelons Γ sa courbe transformée. Ces courbes se correspondent, de telle façon que les tangentes de Γ sont perpendiculaires aux plans tangents correspondants de la courbe C, qui passent par le point O; c'est-à-dire que, si l'on considère le cône K qui a O pour sommet et C pour directrice, le plan tangent à ce cône le long d'une génératrice OM est normal à la tangente de la courbe Γ menée au point m correspondant. On en conclut immédiatement que les génératrices du cône K sont normales aux plans osculateurs de la courbe Γ ou, si l'on veut, qu'elles sont parallèles aux binormales de cette courbe.

Il en résulte que l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins de la courbe Γ est égal à l'angle $d\theta$ formé par les génératrices OM, OM′ infiniment voisines du cône K. Appelons r la distance OM au point O du point M, pris sur la courbe C. Le triangle infiniment petit OMM′ a pour aire

$$\tfrac{1}{2} r^2 \, d\theta,$$

et $r^2\, d\theta$ représente le moment du segment $\overline{\text{MM}'}$ par rapport au point O. L'arc $\overline{mm'}$ correspondant de la courbe Γ a donc pour longueur

$$ds = \frac{r^2\, d\theta}{k},$$

en supposant, comme il a été dit, que l'on prenne $\overline{mm'}$ égal, non pas au moment, mais au quotient de ce moment par la ligne constante k. On déduit

de cette formule

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{k}{r^2}$$

ou, attendu que $\frac{d\theta}{ds}$ est la torsion $\frac{1}{T}$ de la courbe Γ,

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{r^2},$$

c'est-à-dire que *la torsion de la courbe* Γ *en un point* m *est inversement proportionnelle au carré de la distance du point correspondant* M *au centre* O *de transformation.*

8. De là résulte immédiatement la définition de la courbe C, une fois la courbe Γ connue, c'est-à-dire la transformation inverse de celle qui a été considérée.

La courbe Γ étant connue, par un point O on mènera des parallèles à ses binormales, et l'on formera ainsi un cône K. Sur chaque génératrice on prendra un point M, tel que la distance OM soit proportionnelle à la racine carrée du rayon de torsion de la courbe Γ au point correspondant à la génératrice. Le lieu du point M est une courbe C qui admet pour transformée la courbe Γ. Les diverses courbes C que l'on peut obtenir ne diffèrent que par le facteur de proportionnalité, elles sont homothétiques.

V. — *Cas où la courbe* C *est sphérique; courbes à torsion constante.*

9. Si la courbe C est sphérique et que l'on prenne pour O le centre de la sphère qui contient C, r est constant, et, par suite, aussi $\frac{1}{T}$. La courbe Γ a donc sa torsion constante. Réciproquement, d'après ce qui vient d'être dit, toute courbe à torsion constante dérive d'une courbe C sphérique.

Il est clair que la courbe C n'est autre, dans ce cas, que la courbe supplémentaire de l'indicatrice sphérique des tangentes ou, si l'on veut, n'est autre que l'indicatrice sphérique des binormales de la courbe Γ.

10. Appliquons maintenant les remarques précédentes au cas des courbes sphériques fermées.

Si l'axe $\overline{ab}$ du contour C n'est pas nul, et c'est l'immense majorité des cas, la courbe à torsion constante est périodique.

Donc :

En général, lorsque l'indicatrice sphérique des binormales d'une courbe à torsion constante est fermée, la courbe à torsion constante est périodique.

L'hélice fournit l'exemple le plus simple; elle dérive d'un petit cercle de la sphère. Voici encore un autre exemple qui fournit une courbe périodique tracée sur un cylindre algébrique du dixième degré, unicursal :

Prenons, pour la courbe C, une courbe sphérique se projetant sur le plan d'un grand cercle Ω suivant un hypocycloïde à quatre points de rebroussements, concentrique et inscrit au cercle Ω. Le plan des xy étant le plan du cercle Ω et les deux axes Ox, Oy les axes de symétrie de l'hypocycloïde qui contiennent ses points de rebroussement, on a, pour les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de la courbe Γ,

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} a\left(\cos\varphi - \frac{1}{4}\cos^5\varphi\right),$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3} a\left(\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin^5\varphi\right),$$

$$z = \frac{3}{8} a\left(\varphi - \frac{1}{4}\sin^4\varphi\right).$$

Je crois inutile de multiplier ces exemples.

Je dois ajouter que la transformation, par laquelle on déduit d'une courbe sphérique une courbe à torsion constante, n'est qu'une interprétation géométrique des formules que M. J.-A. Serret a données, et que l'on trouvera dans les Notes de l'*Application de l'Analyse à la géométrie de Monge* (édition Liouville).

11. Reste actuellement le cas où la projection de la courbe C sur un plan quelconque aurait une aire nulle.

Dans ce cas, et dans ce cas seulement, *la courbe à torsion constante est fermée.*

La recherche des courbes à torsion constante fermées revient donc à celle de courbes C sphériques fermées à axe nul.

On remarquera que, si une telle courbe est parcourue par un courant

électrique et si l'on place au centre de la sphère une petite aiguille aimantée, l'action du courant sur l'aiguille sera nulle, en sorte que le système sera astatique pour le centre de la sphère.

L'exemple suivant suffira pour montrer qu'il peut, en effet, exister de pareilles courbes et, par suite, aussi des courbes à torsion constante fermées.

Considérons une lemniscate Λ et un cercle Ω contenant entièrement la lemniscate, et la touchant en son sommet A. Je prendrai, pour la courbe C, l'intersection de la sphère dont Ω est un grand cercle, avec le cylindre dont Λ est la section droite. Cette sphère et ce cylindre se touchent au point A, et la courbe C figure sur la sphère une sorte de double huit.

Sa projection sur le plan du cercle Ω est la lemniscate Λ dont l'aire est nulle.

La projection sur le plan de symétrie du cylindre, qui contient le point A, est nulle également. En effet, comme ce plan est un plan de symétrie commun à la sphère et au cylindre, la projection se compose d'un arc de courbe parcouru deux fois en sens opposés.

Enfin la projection sur le plan tangent commun à la sphère et au cylindre est une sorte de double huit dont l'aire est nulle.

La courbe C a donc une aire de projection nulle sur trois plans rectangulaires. Son axe est nul, et, par conséquent, la courbe à torsion constante dont elle est l'indicatrice des binormales est une courbe fermée.

Si l'on prend pour axe Ox l'axe focal de la lemniscate Λ, pour axe Oy le diamètre du cercle Ω perpendiculaire à Oy, et pour Oz une droite perpendiculaire aux deux premières, en supposant que l'un des foyers de la lemniscate soit précisément au centre O de la sphère, on trouve que les coordonnées (X, Y, Z) d'un point de la courbe C peuvent s'exprimer, comme il suit, à l'aide d'un paramètre t,

$$X = \frac{t^2 + 4k^2 t - k^4}{4kt},$$

$$Y = \frac{(t - k^2)\sqrt{(g^2 - t)\left(t - \frac{k^4}{g^2}\right)}}{4kt},$$

$$Z = \sqrt{g^2 - t};$$

on appelle $2k$ la distance des deux foyers de la lemniscate, et l'on pose, pour abréger,

$$g = k(1 + \sqrt{2}).$$

Les formules de J.-A. Serret, qui traduisent analytiquement la transformation géométrique ci-dessus, à savoir :

$$x = \int (Y\,dZ - Z\,dY), \qquad y = \int (Z\,dX - X\,dZ), \qquad z = \int (X\,dY - Y\,dX),$$

feront connaître les coordonnées (x, y, z) d'un point de la courbe à torsion constante en fonction de t. Les radicaux ne portant que sur des polynômes du second degré, les quadratures s'effectueront complètement par les fonctions algébriques et logarithmiques, en sorte qu'on obtiendra les coordonnées (x, y, z) en termes finis, débarrassées de tout signe d'intégration.

12. En résumé :

1° *Toute courbe à torsion constante dont l'indicatrice sphérique est une courbe fermée est périodique ou fermée.*

2° *Elle est périodique si l'axe de l'indicatrice n'est pas nul, ce qui est le cas le plus général, et elle se reproduit par une translation égale et parallèle à cet axe.*

3° *Il peut arriver que l'axe de l'indicatrice soit nul. Dans ce cas et dans ce cas seulement, la courbe à torsion constante est fermée.*

J'ai fourni un exemple de ce dernier cas. Il importait, à certains égards, d'être fixé sur ce point; car, si une courbe réelle algébrique à torsion constante existe, elle est nécessairement fermée.

NOTE SUR LES COURBES

DONT

LES TANGENTES FONT PARTIE D'UN COMPLEXE LINÉAIRE,

PAR M. G. KŒNIGS,

Dans un Mémoire inséré au Tome XI de la deuxième série des *Annales de l'École Normale supérieure*, j'ai défini des courbes ayant ce que j'ai appelé un *axe anharmonique*, c'est-à-dire telles qu'il existe une droite jouissant de la propriété suivante : Les points où cette droite est rencontrée par les quatre plans osculateurs à la courbe considérée, en quatre points quelconques A, B, C, D, ont le même rapport anharmonique que les plans menés par cette droite et ces quatre mêmes points A, B, C, D.

J'ai aussi introduit la notion des surfaces dont les lignes asymptotiques d'une même série ont un même axe anharmonique. Un peu avant la publication de mon travail, M. Sophus Lie avait publié une Note du plus haut intérêt sur les surfaces dont les lignes asymptotiques d'une série appartiennent, par leurs tangentes, à un complexe linéaire. Il me suffira de quelques lignes pour montrer comment les courbes à axe anharmonique et les surfaces dont elles sont les asymptotiques se rattachent aux résultats de M. Sophus Lie. Tel est l'objet de cette courte Note.

Je remarque d'abord ceci. Soient M un point d'une courbe Γ ayant un axe anharmonique Ξ, P le point où le plan osculateur en M coupe cet axe, et appelons α le plan qui contient l'axe Ξ et le point M. Par hypothèse, le couple (α, P), formé de ce plan et du point P, constitue un élément d'une correspondance homographique déterminée, que l'on suppose exister sur la droite Ξ, entre les points de cette droite et les plans qui la contiennent.

Or une congruence linéaire singulière, c'est-à-dire dont les deux directrices coïncident avec une droite unique Ξ, est caractérisée, définie, de la façon suivante :

Pour qu'une droite G fasse partie d'une telle congruence, il faut :

1° Qu'elle coupe la directrice double Ξ;

2° Que, si l'on appelle P le point de rencontre et α le plan commun à ces deux droites, le système point et plan (P, α) constitue un élément d'une correspondance homographique déterminée existant entre les points de la droite Ξ et les plans menés par cette droite.

On voit donc qu'une congruence singulière est définie :

1° Par sa directrice Ξ;

2° Par une correspondance homographique H existant entre les points de Ξ et les plans menés par cette droite.

Ceci posé, reprenons les notations précédentes.

Sur l'axe anharmonique Ξ, nous avons une homographie H de l'espèce ci-dessus mentionnée, à savoir, celle qui lie tout plan α (mené par Ξ et par un point M de la courbe Γ) au point P (trace sur Ξ du plan osculateur au point M). Une congruence linéaire singulière (Ξ, H) est donc définie, comme il a été dit, par cet axe Ξ et cette homographie H existant sur cet axe. Il est clair que la droite MP appartient à cette congruence, et la surface réglée Σ engendrée par MP est contenue dès lors dans cette congruence. La courbe Γ est évidemment contenue par la surface Σ; de plus, le plan tangent en M à la surface Σ n'est autre que le plan mené par MP et la tangente à la courbe Γ, c'est-à-dire le plan osculateur de la courbe Γ. Donc :

La courbe Γ *est une ligne asymptotique sur la surface* Σ.

J'invoquerai maintenant la proposition suivante qui est bien connue :

Soient Ξ *et* Ξ' *deux droites et* Σ *une surface réglée dont toutes les droites rencontrent* Ξ *et* Ξ', c'est-à-dire dont toutes les droites font partie de la congruence linéaire qui admet Ξ, Ξ' pour directrices, *les lignes asymptotiques non rectilignes de la surface* Σ *appartiennent, par leurs tangentes, chacune à un complexe linéaire dans lequel les droites* Ξ *et* Ξ' *sont deux droites conjuguées,* et qui, par conséquent, contient la congruence (Ξ, Ξ').

Lorsque les droites Ξ et Ξ' coïncident en une seule Ξ, tous les complexes linéaires, qui contiennent la congruence linéaire singulière (Ξ, H) correspondante, contiennent la droite Ξ, et le théorème précédent prend alors l'énoncé que voici :

Lorsque les droites d'une surface réglée Σ *font partie d'une con-*

gruence linéaire singulière, les lignes asymptotiques non rectilignes de Σ appartiennent, par leurs tangentes, chacune à l'un des complexes linéaires contenant la congruence, et la directrice double Ξ est une droite commune à tous ces complexes linéaires.

En nous reportant alors à la proposition établie plus haut relativement à la courbe Γ, nous voyons que, puisque Γ est une ligne asymptotique sur la surface Σ et puisque la surface Σ appartient à une congruence singulière d'axe Ξ, les tangentes de la courbe Γ font partie d'un complexe linéaire qui contient aussi l'axe Ξ.

Lors donc qu'une courbe Γ *admettra un axe anharmonique* Ξ, *ses tangentes feront partie d'un complexe linéaire, qui contiendra aussi l'axe* Ξ.

Réciproquement, *soit une courbe* Γ *dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire, et soit* Ξ *une droite de ce complexe; je dis que* Ξ *est un axe anharmonique de la courbe* Γ.

En effet, lorsque les tangentes d'une courbe Γ font partie d'un complexe linéaire, le plan focal d'un point M de la courbe est précisément le plan osculateur en ce point. Cela étant, appelons P le point où le plan osculateur en M vient couper la droite Ξ; la droite MP fait partie du complexe, puisqu'elle est dans le plan osculateur et qu'elle passe par le point M, foyer de ce plan. Maintenant, appelons α le plan mené par Ξ et par la droite PM (ou par le point M); nous connaissons deux droites du complexe situées dans ce plan, Ξ et PM, donc leur point commun P est le foyer du plan α; il en résulte que le point P et le plan α constituent un élément (P, α) de l'homographie H, qui existe sur la droite Ξ entre les points de cette droite et les plans focaux de ces points, plans qui passent par la droite, puisqu'elle appartient au complexe. Cela démontre donc bien que Ξ est un axe anharmonique de la courbe Γ.

Le problème des courbes à axe anharmonique est donc entièrement résolu [1] et rendu identique à celui de la détermination des courbes qui font partie, par leurs tangentes, d'un complexe linéaire.

On voit en même temps que la recherche des surfaces, dont les lignes asymptotiques d'une série appartiennent, par leurs tangentes, chacune à un

---

[1] Dans mon travail précité, j'ai donné l'équation finie de ces courbes, mais sans chercher à en donner une interprétation géométrique.

complexe linéaire, problème traité par M. Lie, comprend celui de la recherche des surfaces dont les lignes asymptotiques d'une série ont un même axe anharmonique.

Il suffit de supposer que, dans le problème traité par M. Lie, les complexes linéaires, dont font partie les tangentes aux lignes asymptotiques, aient une droite commune qui sera, dès lors, l'axe anharmonique commun à toutes ces courbes.

Comme une série de complexes linéaires peuvent avoir en commun une, deux, trois ou même quatre droites, on en conclut qu'il y a des surfaces dont les lignes asymptotiques d'une série ont en commun un, deux, trois ou quatre axes anharmoniques.

Dans le cas, où il existe trois axes anharmoniques, il en existera une infinité d'autres formant un hyperboloïde. Dans le cas où il y en aura quatre, non situés sur une même surface du second degré, il y en aura une double infinité d'autres formant une congruence linéaire. Mais, dans ce cas, la surface sera engendrée par des droites de cette congruence, et nous retrouvons ainsi la proposition qui a été énoncée à la page (E.10).

SUR L'EMPLOI

DE CERTAINES FORMES QUADRATIQUES EN GÉOMÉTRIE,

PAR M. G. KŒNIGS.

1. Le produit de la plus courte distance de deux droites par le sinus de leur angle représente ce que l'on appelle *leur moment*. Si les droites sont infiniment voisines et font partie d'un système p fois indéterminé ($p = 1, 2, 3$ ou 4), le moment est égal à une forme quadratique des p différentielles des variables indépendantes. Par exemple, s'il s'agit de toutes les droites de l'espace, et que l'on ait adopté les coordonnées a, b, p, q de la droite, telles qu'en coordonnées ponctuelles rectangulaires la droite soit représentée par les équations

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q,$$

le moment élémentaire aura pour expression

$$\frac{da\,dq - db\,dp}{1 + a^2 + b^2}.$$

Dans le cas des droites d'un complexe, a, b, p, q deviennent des fonctions de trois paramètres u_1, u_2, u_3 et le moment élémentaire est alors une certaine forme quadratique *ternaire* des différentielles du_1, du_2, du_3. On aura

$$M(du) = A_{11}\,du_1^2 + 2A_{12}\,du_1\,du_2 + \ldots.$$

Le discriminant de cette forme quadratique joue un rôle important, désignons-le par Δ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Les droites singulières du complexe sont celles pour lesquelles a lieu

l'équation

$$\Delta = 0.$$

M. Klein [1] a montré que la condition nécessaire et suffisante pour que les droites d'un complexe soient toutes tangentes à une même surface, c'est que *toutes les droites* de ce complexe aient les caractères de droites singulières. Il suit de là qu'il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$\Delta = 0$$

pour que le complexe soit formé de tangentes à une surface.

Avant M. Klein, M. Cayley [2] avait rencontré cette condition dans l'étude du système des sécantes d'une courbe; mais c'est M. Klein qui a, le premier, reconnu toute la généralité de cette condition.

Dans deux Notes présentées aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* en 1885, je me suis occupé de cette même question, en me proposant surtout de rechercher ce qu'il faut ajouter à la condition Cayley-Klein pour que le complexe soit formé des sécantes d'une courbe. L'objet de ce travail est de donner avec plus de développements que je ne pouvais le faire aux *Comptes rendus* la solution de ce problème, et d'indiquer en même temps le parti que l'on peut tirer de ces résultats pour quelques recherches générales [3].

I. — *Les formes quadratiques ternaires de discriminant nul.*

2. D'éminents géomètres se sont occupés des formes quadratiques, mais tous inscrivent en tête de leurs recherches que le discriminant de la forme n'est pas identiquement nul. Il y a tout lieu de croire cependant que ce cas est loin d'être dépourvu d'intérêt, et j'espère en fournir un exemple dans le cas le plus simple.

Si le complexe de droites que l'on considère est formé des tangentes à une surface, Δ est nul, et réciproquement. J'admets ici ce théorème fré-

---

(1) *Mathematische Annalen,* t. V. — *Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen.*

(2) *Quarterly Journal,* t. III.

(3) On trouvera encore une démonstration du théorème de M. Klein dans mon Mémoire : *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 2e série, t. XI).

quemment démontré et pour lequel j'ai déjà indiqué plusieurs citations. Le moment élémentaire est donc une forme quadratique ternaire de discriminant nul. Pour éclaircir la question, je crois donc utile d'esquisser rapidement un essai de théorie de ces formes, pour indiquer ensuite la place qu'occupe parmi elles le moment élémentaire d'un complexe singulier.

3. Dire que le discriminant de $M(du)$ est nul, c'est dire que cette forme est le produit de deux facteurs linéaires

$$M(du) = \omega\omega',$$

où l'on a

$$\omega = U_1\,du_1 + U_2\,du_2 + U_3\,du_3,$$
$$\omega' = U'_1\,du_1 + U'_2\,du_2 + U'_3\,du_3.$$

Je ferai successivement les deux hypothèses suivantes :

1° Les formes ω et ω' admettent toutes deux un facteur intégrant;

2° L'une, au moins, de ces deux formes n'admet pas de facteur d'intégrabilité.

Dans le *premier cas,* on peut poser, en appelant λ, μ, ξ, η quatre fonctions convenables de u_1, u_2, u_3,

$$\omega = \lambda\,d\xi,$$
$$\omega' = \mu\,d\eta;$$

d'où

$$M(du) = \lambda\mu\,d\xi\,d\eta.$$

Si η est une simple fonction de ξ, on a donc

$$(\alpha) \qquad M(du) = g\,d\xi^2,$$

où g et ξ sont deux fonctions convenables de u_1, u_2, u_3.

Si η ne se réduit pas à une simple fonction de ξ, on a

$$(\beta) \qquad M(du) = g\,d\xi\,d\eta,$$

où g, ξ, η sont trois fonctions convenables des u.

Cette première hypothèse conduit donc, par un changement de variables indépendantes, à deux types canoniques irréductibles et distincts (α) et (β).

4. Le *second cas* exige une discussion plus approfondie.

Puisque ω et ω' ne sont pas tous les deux intégrables par multiplication,

supposons, pour fixer les idées, que ω' ne le soit pas, et formons l'expression

$$\omega + \rho\omega'.$$

Il est toujours possible de déterminer ρ, de sorte que cette expression admette un facteur intégrant, c'est-à-dire de telle sorte qu'il existe deux fonctions convenables λ et ξ donnant lieu à l'identité

$$\omega + \rho\omega' = \lambda\, d\xi. \tag{1}$$

La condition bien connue d'intégrabilité nous fournit immédiatement l'équation en ρ

$$V_1 \frac{\partial\rho}{\partial u_1} + V_2 \frac{\partial\rho}{\partial u_2} + V_3 \frac{\partial\rho}{\partial u_3} = \Theta(\omega) + 2\Theta(\omega, \omega')\rho + \Theta(\omega')\rho^2, \tag{2}$$

en faisant, pour abréger,

$$V_1 = U_3 U'_2 - U_2 U'_3,$$
$$V_2 = U_1 U_3 - U_3 U'_1,$$
$$V_3 = U_2 U'_1 - U_1 U'_2;$$

$$\Theta(\omega) = \left(\frac{\partial U_1}{\partial u_2} - \frac{\partial U_2}{\partial u_1}\right) U_3 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial u_3} - \frac{\partial U_3}{\partial u_2}\right) U_1 + \left(\frac{\partial U_3}{\partial u_1} - \frac{\partial U_1}{\partial u_3}\right) U_2,$$

$$2\Theta(\omega, \omega') = \left(\frac{\partial U_1}{\partial u_2} - \frac{\partial U_2}{\partial u_1}\right) U'_3 + \left(\frac{\partial U'_1}{\partial u_2} - \frac{\partial U'_2}{\partial u_1}\right) U_3 + \ldots,$$

$$\Theta(\omega') = \left(\frac{\partial U'_1}{\partial u_2} - \frac{\partial U'_2}{\partial u_1}\right) U'_3 + \ldots.$$

On vérifie aussi que ξ doit satisfaire l'équation

$$V_1 \frac{\partial\xi}{\partial u_1} + V_2 \frac{\partial\xi}{\partial u_2} + V_3 \frac{\partial\xi}{\partial u_3} = 0, \tag{3}$$

qui n'est autre que l'équation (2) privée de second membre.

Cela posé, soient ρ et σ deux solutions différentes de l'équation (2); on aura les deux identités

$$\omega + \rho\omega' = \lambda\, d\xi,$$
$$\omega + \sigma\omega' = \mu\, d\eta,$$

où λ, μ, ξ, η sont quatre fonctions convenables.

J'ajoute que ξ *et* η *ne peuvent être fonctions l'une de l'autre, et que le quotient* $\frac{\lambda}{\mu}$ *ne peut être une simple fonction de* ξ *et* η.

En effet, des deux identités ci-dessus on déduit

$$(\rho - \sigma)\omega' = \lambda\, d\xi - \mu\, d\eta;$$

si l'on avait $\eta = f(\xi)$, on aurait

$$(\rho - \sigma)\omega' = [\lambda - \mu f'(\xi)]\, d\xi,$$

et, comme $(\rho - \sigma)$ n'est pas nul, ω' admettrait un facteur intégrant, ce qui est contre l'hypothèse.

Supposons de même que l'on eût

$$\frac{\lambda}{\mu} = \varphi(\xi, \eta),$$

on en déduirait

$$(\rho - \sigma)\omega' = \mu[\varphi(\xi, \eta)\, d\xi - d\eta];$$

et, comme l'expression $\varphi(\xi, \eta)\, d\xi - d\eta$ admet toujours un facteur intégrant, il en serait de même pour ω'.

Ainsi, *pourvu que ρ et σ soient des solutions distinctes de l'équation* (2), *les trois fonctions suivantes de u_1, u_2, u_3, à savoir : ξ, η, $\frac{\lambda}{\mu}$, sont indépendantes entre elles.*

Nous poserons

$$\zeta = \frac{\lambda}{\mu},$$

et nous prendrons pour nouvelles variables indépendantes ξ, η, ζ.

Des relations

$$\omega + \rho\omega' = \mu\zeta\, d\xi,$$
$$\omega + \sigma\omega' = \mu\, d\eta$$

on tirera ω et ω' :

$$\omega = \frac{\mu}{\rho - \sigma}(\rho\, d\eta - \sigma\zeta\, d\xi),$$

$$\omega' = \frac{\mu}{\rho - \sigma}(\zeta\, d\xi - d\eta);$$

d'où

$$\mathrm{M}(du) = \omega\omega' = \left(\frac{\mu}{\rho - \sigma}\right)^2 (\rho\, d\eta - \sigma\zeta\, d\xi)(\zeta\, d\xi - d\eta).$$

5. Ici encore je distinguerai deux cas, selon que ω est intégrable par multiplication ou non.

1° Si ω admet un facteur intégrant, la quantité $\Theta(\omega)$ est nulle, et l'équation (2) admet la solution $\rho = 0$. En adoptant alors cette solution, on obtient le type réduit

$$(\gamma) \qquad \mathrm{M}(du) = g(\zeta\, d\xi - d\eta)\, d\xi,$$

où g est une fonction convenable des variables indépendantes ξ, η, ζ.

2° Si ω n'admet pas de facteur intégrant, ρ ne pourra jamais être nul, et, en posant

$$\tau = \frac{\sigma\zeta}{\rho},$$

on aura le type réduit

$$(\delta) \qquad \mathrm{M}(du) = g(\tau\, d\xi - d\eta)(\zeta\, d\xi - d\eta),$$

où g et τ sont deux fonctions convenables des variables indépendantes ξ, η, ζ; de plus, τ dépend effectivement de ξ et ne se réduit pas à une simple fonction de ξ, η. Au fond, il importe peu que l'on prenne ξ, η, ζ ou ξ, η, τ pour variables indépendantes; nous verrons plus loin que ce qui caractérise surtout le type général (δ), c'est la forme de la relation qui lie ξ, η, ζ, τ

$$\mathrm{F}(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0,$$

relation qui contient *nécessairement* ζ et τ.

6. Avant d'aller plus loin, je m'arrêterai un instant sur l'équation (2) dont la forme rappelle un type bien connu d'équations aux dérivées ordinaires du premier ordre.

Considérons d'une façon générale l'équation aux dérivées partielles

$$(e) \qquad \mathrm{V}_1 \frac{\partial\rho}{\partial u_1} + \mathrm{V}_2 \frac{\partial\rho}{\partial u_2} + \ldots + \mathrm{V}_n \frac{\partial\rho}{\partial u_n} = \mathrm{A}\rho^2 + 2\mathrm{B}\rho + \mathrm{C},$$

où V_1, V_2, ..., V_n, A, B, C sont des fonctions données de n variables indépendantes u_1, u_2, ..., u_n.

Je dis que *le rapport anharmonique de quatre solutions de l'équation* (e) *est une solution de l'équation sans second membre*

$$(e') \qquad \mathrm{V}_1 \frac{\partial\xi}{\partial u_1} + \ldots + \mathrm{V}_n \frac{\partial\xi}{\partial u_n} = 0.$$

En effet, on a, en appelant λ, μ, ν, ρ quatre fonctions distinctes quelconques,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial u_i} & \lambda^2 & \lambda & 1 \\ \frac{\partial\mu}{\partial u_i} & \mu^2 & \mu & 1 \\ \frac{\partial\nu}{\partial u_i} & \nu^2 & \nu & 1 \\ \frac{\partial\rho}{\partial u_i} & \rho^2 & \rho & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-\rho)^2(\nu-\mu)^2 \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\lambda-\mu}{\lambda-\rho}\,\frac{\nu-\rho}{\nu-\mu}\right).$$

Posons, pour abréger,

$$V(\rho) = V_1 \frac{\partial\rho}{\partial u_1} + \ldots + V_n \frac{\partial\rho}{\partial u_n};$$

on trouve, après multiplication par V_i et sommation,

$$\begin{vmatrix} V(\lambda) & \lambda^2 & \lambda & 1 \\ V(\mu) & \mu^2 & \mu & 1 \\ V(\nu) & \nu^2 & \nu & 1 \\ V(\rho) & \rho^2 & \rho & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-\rho)^2(\nu-\mu)^2\, V\left(\frac{\lambda-\mu}{\lambda-\rho}\,\frac{\nu-\rho}{\nu-\mu}\right).$$

Maintenant, si λ, μ, ν, ρ sont quatre solutions de l'équation (e), on a

$$\begin{gathered} V(\lambda) = A\lambda^2 + 2B\lambda + C, \\ V(\mu) = A\mu^2 + 2B\mu + C, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{gathered}$$

le déterminant est nul et, par suite,

$$0 = V\left(\frac{\lambda-\mu}{\lambda-\rho}\,\frac{\nu-\rho}{\nu-\mu}\right)(\lambda-\rho)^2(\nu-\mu)^2,$$

ce qui démontre le théorème.

Si, en particulier, on suppose $n = 1$, on a l'équation de Riccati ordinaire

$$\frac{d\rho}{du} = A\rho^2 + 2B\rho + C;$$

l'équation sans second membre est

$$\frac{d\rho}{du} = 0,$$

et l'on retrouve ce théorème bien connu, que le rapport anharmonique de quatre solutions de l'équation de Riccati est une solution de l'équation $\frac{d\rho}{du} = 0$, c'est-à-dire une constante.

On sait l'usage que l'on fait de ce théorème pour l'intégration de l'équation de Riccati. Une utilité toute pareille se retrouve dans le cas plus général que j'ai considéré.

Soient, en effet, λ, μ, ν trois solutions de l'équation (e) et P la solution générale; la fonction

$$\frac{P-\lambda}{P-\mu}\,\frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda} = \Xi$$

sera la solution générale de l'équation sans second membre. On aura donc P sous la forme

$$P = \frac{a\Xi + b}{c\Xi + e},$$

où Ξ est la solution générale de l'équation sans second membre. Or, si ξ_1, ξ_2, ..., ξ_{n-1} sont $(n-1)$ solutions particulières indépendantes de l'équation (e'), on aura

$$\Xi = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}),$$

où f représente une fonction arbitraire; ainsi, finalement P sera de la forme

$$P = \frac{af(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) + b}{cf(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}) + e},$$

où a, b, c, e sont quatre fonctions déterminées, et f une fonction arbitraire de $(n-1)$ fonctions connues. On connaît ainsi la forme sous laquelle la fonction arbitraire entre dans l'expression de P.

Remarquons que, si, outre les trois solutions λ, μ, ν, on en connaissait encore $(n-1)$, ρ_1, ρ_2, ..., ρ_{n-1}, fournissant $(n-1)$ fonctions ξ indépendantes

$$\xi_i = \frac{\rho_i - \lambda}{\rho_i - \mu}\,\frac{\nu-\mu}{\nu-\lambda},$$

on pourrait écrire immédiatement l'intégrale.

L'intégrale générale de l'équation (e) se déduit donc de $(n+2)$ solutions particulières, convenables de cette équation, ou bien de trois solutions

particulières et de $(n-1)$ solutions particulières indépendantes de l'équation sans second membre.

Mais notre objet n'est pas d'insister sur cette question qui donne lieu encore à plusieurs extensions des propriétés de l'équation de Riccati, et je reviens au sujet qui nous occupe, la classification des formes quadratiques ternaires de discriminant nul.

7. J'ai déjà dit que la forme de la relation qui lie ξ, η, ζ, τ joue un rôle essentiel dans cette classification.

Pour s'en rendre compte, il suffit d'étudier la transformation qui permet de passer d'un type réduit à une autre expression du même type.

Supposons que, par un choix convenable de ξ, η, ζ, τ, on ait trouvé d'abord

$$M(du) = g(\tau\, d\xi - d\eta)(\zeta\, d\xi - d\eta),$$

puis, d'une autre façon,

$$M(du) = g'(\tau'\, d\xi' - d\eta')(\zeta'\, d\xi' - d\eta').$$

D'abord, comme ξ, η, ξ', η' vérifient, toutes les quatre, l'équation

$$V_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + V_2 \frac{\partial \xi}{\partial u_2} + V_3 \frac{\partial \xi}{\partial u_3} = 0,$$

et que ξ, η sont indépendantes, aussi bien que ξ' et η', il faut que ξ' et η' soient de simples fonctions de ξ, η

$$(f) \qquad \begin{cases} \xi' = \varphi(\xi, \eta), \\ \eta' = \psi(\xi, \eta), \end{cases}$$

et, de plus, le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(\xi, \eta)}$$

doit être différent de zéro.

Reste à savoir comment ζ', τ' dépendent de ξ, η, ζ, τ et, enfin, comment se trouve transformée la relation existant entre ξ, η, ζ, τ.

On a identiquement, en remplaçant $d\xi'$, $d\eta'$ par leur expression en fonc-

tion de $d\xi$ et $d\eta$,

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(du) &= g'\left[\left(\tau'\frac{\partial\xi'}{\partial\xi} - \frac{\partial\eta'}{\partial\xi}\right)d\xi + \left(\tau'\frac{\partial\xi'}{\partial\eta} - \frac{\partial\eta'}{\partial\eta}\right)d\eta\right]\\ &\quad\times\left[\left(\zeta'\frac{\partial\xi'}{\partial\xi} - \frac{\partial\eta'}{\partial\xi}\right)d\xi + \left(\zeta'\frac{\partial\xi'}{\partial\eta} - \frac{\partial\eta'}{\partial\eta}\right)d\eta\right]\\ &= g'\left(\tau'\frac{\partial\xi'}{\partial\eta} - \frac{\partial\eta'}{\partial\eta}\right)\left(\zeta'\frac{\partial\xi'}{\partial\eta} - \frac{\partial\eta'}{\partial\eta}\right)\\ &\quad\times\left(\frac{\tau'\frac{\partial\xi'}{\partial\xi} - \frac{\partial\eta'}{\partial\xi}}{\frac{\partial\eta'}{\partial\eta} - \tau'\frac{\partial\xi'}{\partial\eta}}d\xi - d\eta\right)\left(\frac{\zeta'\frac{\partial\xi'}{\partial\xi} - \frac{\partial\eta'}{\partial\xi}}{\frac{\partial\eta'}{\partial\eta} - \zeta'\frac{\partial\xi'}{\partial\eta}}d\xi - d\eta\right).\end{aligned}$$

En comparant avec la première forme, on a donc

$$(f_0)\qquad \zeta = \frac{\zeta'\frac{\partial\xi'}{\partial\xi} - \frac{\partial\eta'}{\partial\xi}}{\frac{\partial\eta'}{\partial\eta} - \zeta'\frac{\partial\xi'}{\partial\eta}},\qquad \tau = \frac{\tau'\frac{\partial\xi'}{\partial\xi} - \frac{\partial\eta'}{\partial\xi}}{\frac{\partial\eta'}{\partial\eta} - \tau'\frac{\partial\xi'}{\partial\eta}}$$

ou, autrement,

$$(f')\qquad \zeta' = \frac{\frac{\partial\eta'}{\partial\xi} + \zeta\frac{\partial\eta'}{\partial\eta}}{\frac{\partial\xi'}{\partial\xi} + \zeta\frac{\partial\xi'}{\partial\eta}},\qquad \tau' = \frac{\frac{\partial\eta'}{\partial\xi} + \zeta\frac{\partial\eta'}{\partial\eta}}{\frac{\partial\xi'}{\partial\xi} + \zeta\frac{\partial\xi'}{\partial\eta}}.$$

On doit remarquer, d'autre part, que l'on a aussi identiquement, en adoptant le signe δ des variations,

$$\frac{\delta\eta'}{\delta\xi'} = \frac{\frac{\partial\eta'}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta'}{\partial\eta}\frac{\delta\eta}{\delta\xi}}{\frac{\partial\xi'}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta'}{\partial\eta}\frac{\delta\eta}{\delta\xi}}.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

La quantité ζ' se déduit de ζ, et la quantité τ' se déduit de τ par la même formule qui fournit $\frac{\delta\eta'}{\delta\xi'}$ en fonction de $\frac{\delta\eta}{\delta\xi}$.

On peut dire que les trois quantités ζ, τ et $\frac{\delta\eta}{\delta\xi}$ sont *cogrédientes,* car elles

sont transformées par la même substitution

$$u' = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + u\frac{\partial\psi}{\partial\eta}}{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + u\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}};$$

cette substitution est entièrement définie dès que l'on connaît l'expression de ξ', η' à l'aide de ξ, η.

8. Reportons-nous maintenant à la relation qui lie ξ, η, ζ, τ. On aperçoit tout de suite que, si cette relation est algébrique et du degré n, par exemple, par rapport à ζ et τ pris séparément, le passage d'un type normal à un autre n'altérera pas ce caractère. En effet, les formules (f') sont linéaires en ζ et τ. Mais il y a plus, elles sont *les mêmes* pour ces deux quantités, et, par conséquent, si la relation qui lie ξ, η, ζ, τ est symétrique en ζ et τ, ce caractère subsistera encore à travers le passage d'un type normal à l'autre.

Un cas simple et important, c'est celui où la relation affecte la forme d'une homographie involutive et est, par conséquent,

$$L\tau\zeta + M(\zeta + \tau) + N = 0.$$

Je me suis permis, dans ma Note à l'Académie, d'attribuer à ces formes spéciales le nom de formes *linéo-involutives*.

9. Une forme sera donc linéo-involutive lorsqu'on pourra la ramener au type

$$M(du) = g(\tau\, d\xi - d\eta)(\zeta\, d\xi - d\eta),$$

où ξ, η, ζ, τ sont liés par l'équation

$$\text{(F)} \qquad L\tau\zeta + M(\zeta + \tau) + N = 0,$$

L, M, N étant trois fonctions quelconques de ξ, η.

Je vais montrer tout d'abord que les formes *linéo-involutives* sont susceptibles d'une réduction à un type plus simple. Quel que soit le système des variables normales adopté, le type de l'équation (F) subsiste toujours, mais *on peut toujours s'arranger de sorte que* L *et* N *soient nuls*.

Posons, en effet,

$$\xi' = \varphi(\xi, \eta), \qquad \eta' = \psi(\xi, \eta);$$

l'équation (F) devient, en appliquant les formules f'_0

$$L'\tau'\zeta' + M'(\zeta' + \tau') + N' = 0,$$

où l'on a

$$L' = L\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 - 2M\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + N\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2,$$

$$-M' = L\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi} - M\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) + N\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta},$$

$$N' = L\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)^2 - 2M\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + N\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2.$$

Il est impossible d'avoir à la fois

$$L' = 0, \qquad M' = 0, \qquad N' = 0,$$

car le déterminant des trois équations linéaires homogènes en L, M, N que l'on obtiendrait ainsi est le carré du déterminant fonctionnel

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(\xi, \eta)},$$

qui est essentiellement différent de zéro. Mais on peut déterminer φ et ψ, de sorte que l'on ait

$$L' = 0, \qquad M' = 0.$$

En effet, l'équation

$$L\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)^2 - 2M\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\eta} + N\left(\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)^2 = 0$$

se décompose dans les deux équations

$$L\frac{\partial\theta}{\partial\xi} - (M + \sqrt{M^2 - LN})\frac{\partial\theta}{\partial\eta} = 0,$$

$$L\frac{\partial\theta}{\partial\xi} - (M - \sqrt{M^2 - LN})\frac{\partial\theta}{\partial\eta} = 0;$$

chacune d'elles admet une intégrale; soient φ et ψ les deux intégrales que l'on obtient ainsi, il suffira de prendre

$$\xi' = \varphi, \qquad \eta' = \psi.$$

Les fonctions φ et ψ sont indépendantes entre elles tant que l'expression

$$M^2 - LN$$

n'est pas identiquement nulle. Mais, dans ce cas, l'équation (F) se décompose en deux facteurs, car on a identiquement

$$(L\tau + M)(L\zeta + M) = L[L\tau\zeta + M(\zeta + \tau) + N] \quad \text{si} \quad M^2 = LN.$$

Ce cas limite, qui donne $\tau =$ fonction de ξ et de η, revient au cas déjà étudié, où l'un des facteurs de la forme est intégrable.

En excluant donc ce cas qui est relatif à un autre type réduit, nous voyons que l'on peut toujours faire en sorte, *et d'une seule façon,* que L et N soient nuls, tandis que M reste essentiellement différent de zéro. La relation (F) prend alors la forme très simple

$$\zeta + \tau = 0,$$

en sorte que le type réduit des formes *linéo-involutives* est définitivement le suivant :

$$(\varepsilon) \qquad M(du) = g(\zeta^2 d\xi^2 - d\eta^2),$$

où g est une fonction quelconque des variables indépendantes ξ, η, ζ.

10. Les formes *linéo-involutives* vont se représenter dans la suite. On vient de voir que certains cas limites de ces formes étaient rangés dans un type réduit précédemment défini. Il convient de ne pas séparer trop absolument ces cas limites du cas général. Et nous admettrons trois types de formes *linéo-involutives*, ainsi définis :

Premier type (type général),

$$M(du) = g(\zeta^2 d\xi^2 - d\eta^2);$$

Deuxième type (type limite),

$$M(du) = g(\zeta\, d\xi - d\eta)\, d\xi;$$

Troisième type (autre type limite),

$$M(du) = g\, d\xi\, d\eta.$$

Le deuxième type n'est autre que le type général des formes ayant un facteur intégrable; le troisième, le type général des formes dont les deux facteurs sont intégrables.

On remarquera que, dans cette classification, la forme du multiplicateur g est indifférente, et que ce multiplicateur n'intervient aucunement.

II. — *Étude du moment élémentaire d'un complexe singulier.*

11. Supposons qu'un complexe soit formé des tangentes d'une surface, et cherchons l'expression du moment élémentaire relatif à ce complexe.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface, exprimées en fonction de deux paramètres ξ, η, et posons

$$x_1 = \frac{\partial x}{\partial \xi}, \qquad x_2 = \frac{\partial x}{\partial \eta}, \qquad x_{11} = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}, \qquad x_{12} = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi\, \partial \eta}, \qquad x_{22} = \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2},$$

et de même pour y, z. Une tangente quelconque à la surface pourra être représentée par les équations

$$\frac{X - x}{x_1 + \lambda x_2} = \frac{Y - y}{y_1 + \lambda y_2} = \frac{Z - z}{z_1 + \lambda z_2}.$$

Les variables (ξ, η) fixent le point où la tangente touche la surface, et λ détermine son orientation dans le plan tangent.

Si l'on adopte les équations d'une droite sous la forme

$$\begin{aligned} cy - bz &= p, \\ az - cx &= q, \\ bx - ay &= r, \end{aligned}$$

le moment élémentaire affecte la forme

$$M = \frac{da\, dp + db\, dq + dc\, dr}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

On a ici

$$\begin{aligned} a &= x_1 + \lambda x_2, \\ b &= y_1 + \lambda y_2, \\ c &= z_1 + \lambda z_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= cy - bz, \\ q &= az - cx, \\ r &= bx - ay; \end{aligned}$$

d'où, en posant

$$\begin{vmatrix} x_{11} & y_{11} & z_{11} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = D_{11},$$

$$\begin{vmatrix} x_{12} & y_{12} & z_{12} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = D_{12},$$

$$\begin{vmatrix} x_{22} & y_{22} & z_{22} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = D_{22},$$

$$M = -\frac{[(D_{11}+\lambda D_{12})\,d\xi + (D_{12}+\lambda D_{22})\,d\eta](\lambda\,d\xi - d\eta)}{a^2+b^2+c^2};$$

on peut donc prendre

$$\zeta = \lambda, \qquad \tau = -\frac{D_{11}+\lambda D_{12}}{D_{12}+\lambda D_{22}},$$

d'où résultera

$$M = g(\tau\,d\xi - d\eta)(\zeta\,d\xi - d\eta),$$

avec la relation

$$D_{22}\zeta\tau + D_{12}(\zeta+\tau) + D_{11} = 0.$$

Le moment élémentaire d'un complexe singulier appartient donc au type des formes linéo-involutives.

Supposons, en particulier, que l'on ait choisi ξ, η, de façon à avoir

$$D_{11} = 0, \qquad D_{22} = 0;$$

alors les courbes $\xi =$ const., $\eta =$ const. sont les lignes asymptotiques. Avec ce choix de variables, le moment M prend la forme réduite

$$M = g(\zeta^2\,d\xi^2 - d\eta^2);$$

car on a, dans ce cas,

$$\tau + \zeta = 0.$$

Donc :

En général, le moment élémentaire d'un complexe singulier est une forme linéo-involutive, et la réduction au type normal

$$g(\zeta^2\,d\xi^2 - d\eta^2)$$

coïncide avec la détermination des lignes asymptotiques de la surface enveloppe des droites du complexe.

Les tangentes à ces lignes sont représentées dans le complexe par les équations

$$\eta = \text{const.}, \qquad \zeta = 0$$

et

$$\xi = \text{const.}, \qquad \frac{1}{\zeta} = 0,$$

respectivement pour chacune des deux séries.

12. Ce résultat a une explication géométrique très simple. Nous avons trouvé, en effet,

$$\mathrm{M} = g(\zeta\, d\xi + d\eta)(\zeta\, d\xi - d\eta).$$

Or, si l'on veut engendrer une développable dans le complexe, il faut établir entre ξ, η, ζ deux équations, en vertu desquelles M soit nul. Cela peut avoir lieu de deux manières, selon que $\zeta\, d\xi - d\eta$ est nul ou que c'est, au contraire, $\zeta\, d\xi + d\eta$ qui s'évanouit.

Supposons d'abord que l'on ait

$$\zeta\, d\xi - d\eta = 0;$$

cette équation exprime que le point de contact se déplace dans la direction de la tangente elle-même, et l'on a, par conséquent, une développable dont l'arête de rebroussement est tracée sur la surface.

Supposons, au contraire, que l'autre facteur soit nul,

$$\zeta\, d\xi + d\eta = 0;$$

si l'on a égard à ce que $\xi = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$ sont les lignes asymptotiques, cette équation exprime que le point de contact se déplace suivant la direction conjuguée de la tangente considérée. On a donc, dans ce cas, une développable circonscrite à la surface.

Ainsi, dans le moment élémentaire d'un complexe singulier, chacun des facteurs linéaires de la forme a sa signification propre. Il y a deux sortes de développables formées des tangentes de la surface, et chacun de ces facteurs s'annule pour les développables de l'une de ces deux séries.

Mais il est des développables qui font partie à la fois de ces deux séries de développables : ce sont les développables dont les arêtes sont les lignes

asymptotiques de la surface. Suivant ces développables, les deux facteurs de la forme doivent s'évanouir à la fois, et c'est ce que l'on réalise, soit en prenant

$$d\eta = 0, \qquad \zeta = 0;$$

soit en prenant

$$d\xi = 0, \qquad \frac{1}{\zeta} = 0.$$

La solution $d\xi = 0$, $d\eta = 0$ fournirait seulement le système des tangentes à la surface en l'un de ses points.

13. Tout ce qui précède est légitime tant que les lignes asymptotiques de la surface enveloppe sont distinctes; si elles coïncident, les résultats précédents sont notablement modifiés. La surface enveloppe est alors développable. Supposons que $\xi =$ const. représente les génératrices rectilignes; alors on aura, comme on sait,

$$D_{12} = 0, \qquad D_{22} = 0,$$

et le moment élémentaire prendra la forme

$$M = g(\zeta\, d\xi - d\eta)\, d\xi.$$

On reconnait là le second type des formes linéo-involutives.

L'équation $\xi =$ const. représente toutes les droites situées dans l'un des plans tangents de la développable. L'équation

$$\zeta\, d\xi - d\eta = 0$$

représente, au contraire, le système des développables dont les arêtes sont des courbes tracées sur la surface. Les développables du second système, c'est-à-dire circonscrites à la surface, n'existent plus dans ce cas, ou plutôt elles dégénèrent en des systèmes plans de lignes droites.

14. Une singularité ne peut se présenter dans la géométrie de la ligne droite, sans que la singularité réciproque se montre aussitôt. Nous allons, en effet, trouver des systèmes réglés réciproques des précédents, et offrant les particularités qui correspondent dualistiquement à celles que nous venons de rencontrer.

Supposons qu'un complexe soit formé des droites qui rencontrent une

courbe fixe; on pourra représenter une droite quelconque de ce complexe par les équations

$$X = aZ + x - az,$$
$$Y = bZ + y - bz,$$

où x, y, z sont les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe, fonctions d'un paramètre ξ, et a, b deux paramètres qui fixent l'orientation de la droite.

On aura, pour le moment élémentaire,

$$M = \frac{da(dy - b\,dz) - db(dx - a\,dz)}{1 + a^2 + b^2},$$

ce qui s'écrit encore, en faisant

$$x' = \frac{dx}{d\xi}, \qquad y' = \frac{dy}{d\xi}, \qquad z' = \frac{dz}{d\xi};$$
$$M = \frac{[da(y' - bz') - db(x' - az')]\,d\xi}{1 + a^2 + b^2}.$$

Ici encore l'un des deux facteurs est intégrable.

L'équation $\xi = \text{const.}$ représente, dans le complexe, les droites qui passent par un même point de la courbe. Au contraire, l'équation

$$da(y' - bz') - db(x' - az') = 0$$

représentera le système des développables circonscrites à la courbe considérée. Dans ce cas, le premier système des développables n'existe plus, ou plutôt dégénère en des gerbes de droites dont les sommets sont les points de la courbe directrice.

En résumé, le moment affecte le second type dans deux cas : si l'enveloppe du complexe est une développable, ou bien si cette enveloppe est une courbe. Le moment est alors de la forme

$$M = g(\zeta\,d\xi - d\eta)\,d\xi,$$

ou peut être ramené à cette forme. Dans le premier cas, l'équation $\xi = \text{const.}$ convient à toutes les droites d'un plan, et la développable est l'enveloppe de ce plan. Dans le second cas, l'équation $\xi = \text{const.}$ convient à toutes les droites issues d'un point, et le lieu de ce point est la courbe directrice. Pour

distinguer les deux cas, une fois que l'on aura ramené le moment au type

$$g(\zeta\, d\xi - d\eta)\, d\xi,$$

il suffira donc d'interpréter l'équation $\xi = \text{const.}$

15. Signalons enfin un dernier cas, qui est une limite commune à tous les cas précédemment considérés. En effet, une enveloppe de plans, tout aussi bien qu'un lieu de points, peut se réduire à une ligne droite; on obtient donc comme cas limite le système des droites qui en coupent une autre. Il nous suffit évidemment d'étudier ce cas limite comme une dégénérescence de celui où toutes les droites du complexe coupent une courbe fixe.

Dans cette hypothèse, nous avons trouvé pour le moment la forme

$$M = \frac{[da(y' - bz') - db(x' - az')]\, d\xi}{1 + a^2 + b^2}.$$

Il peut arriver que le facteur

$$da(y' - bz') - db(x' - az')$$

soit intégrable. Il faut et il suffit, pour cela, que le quotient

$$\frac{y' - bz'}{x' - az'} = \frac{\dfrac{y'}{z'} - b}{\dfrac{x'}{z'} - a}$$

ne dépende pas de ξ, ce qui exige que $\frac{y'}{z'}$ et $\frac{x'}{z'}$ soient des constantes. Si l'on pose

$$\frac{x'}{z'} = \alpha = \text{const.}, \qquad \frac{y'}{z'} = \beta = \text{const.},$$

on trouve, par intégration,

$$x = \alpha z + \pi,$$
$$y = \beta z + \chi,$$

où π et χ sont deux nouvelles constantes, et la courbe directrice est une ligne droite. Le moment élémentaire devient, dans cette hypothèse, en prenant pour ξ le z du point de rencontre avec la directrice

$$M = \frac{(a - \alpha)^2}{1 + a^2 + b^2}\, d\left(\frac{b - \beta}{a - \alpha}\right) dz.$$

Les deux facteurs, dans lesquels le moment se décompose, sont, comme on l'a dit, intégrables. L'équation

$$dz = 0$$

représente les droites qui ont un même point commun avec la droite directrice; au contraire, l'équation

$$d\left(\frac{b-\beta}{a-\alpha}\right) = 0$$

représente celles qui ont, avec cette droite, un *même plan* en commun.

16. En énumérant tous les cas possibles que nous avons rencontrés, nous pouvons donc former le Tableau suivant :

1° Les droites du complexe singulier touchent une surface quelconque (c'est-à-dire non développable, ni dégénérée en une courbe); alors le moment appartient au type général des formes linéo-involutives, et la réduction de ce moment au type canonique réduit

$$A\,d\xi^2 + B\,d\eta^2$$

coïncide avec la détermination des lignes asymptotiques de la surface enveloppe. Le quotient $\frac{A}{B}$ ne saurait, dans ce cas, se réduire à une simple fonction de ξ, η.

Les lignes asymptotiques sont définies dans le complexe par les équations

$$\xi = \text{const.}, \qquad \frac{B}{A} = 0 \qquad \text{pour une série;}$$

$$\eta = \text{const.}, \qquad \frac{A}{B} = 0 \qquad \text{pour l'autre série.}$$

2° Les droites du complexe touchent toutes une même surface développable ou rencontrent toutes une courbe directrice (qui n'est pas une ligne droite).

Le moment appartient alors au second type des formes linéo-involutives. Un de ses facteurs est intégrable, et la forme peut être ramenée au type réduit

$$(A\,d\xi + B\,d\eta)\,d\xi,$$

où le quotient $\frac{A}{B}$ ne peut être une simple fonction de ξ, η.

L'équation $\xi =$ const. convient, dans un cas, à toutes les droites d'un même plan, et, lorsque ξ varie, ce plan enveloppe la développable directrice des droites du complexe.

Dans l'autre cas, l'équation $\xi =$ const. convient à toutes les droites qui passent par un point fixe, et, lorsque ξ varie, ce point décrit la courbe directrice des droites du complexe.

3° Enfin, le complexe peut être formé des droites qui rencontrent une droite fixe. Dans ce cas, le moment a ses deux facteurs intégrables ; il appartient donc au troisième type des formes linéo-involutives.

Il peut être mis sous la forme

$$A\, d\xi\, d\eta.$$

L'équation $\xi =$ const. convient à toutes les droites qui passent par un même point de la droite, et ce point lui-même se meut sur cette droite lorsque ξ varie.

Au contraire, l'équation $\eta =$ const. convient à toutes les droites situées dans un même plan mené par la droite directrice, et, lorsque η varie, le plan tourne autour de cette droite.

17. Telle est donc la réponse au problème que je m'étais proposé. Que faut-il ajouter à la condition Cayley-Klein pour qu'un complexe soit formé des sécantes d'une courbe ?

Il faut et il suffit que l'un, au moins, des facteurs, dans lesquels le moment élémentaire est décomposable, admette un facteur d'intégrabilité.

Je dis il suffit, bien que la même condition implique aussi le cas où l'enveloppe du complexe est une surface développable ; mais pour qui connaît la loi de dualité, il est clair que ces deux cas ne peuvent être séparés l'un de l'autre, et, pour les discerner, on n'aura d'autre ressource, comme je l'ai dit, que d'interpréter géométriquement l'équation

$$\xi = \text{const.}$$

III. — *Application aux surfaces de singularités des complexes quadratiques.*

18. L'application des résultats que l'on vient d'obtenir conduit immédiatement à la détermination des lignes asymptotiques de la surface de Kummer du quatrième ordre à seize points doubles. M. Klein [1] a déjà obtenu ces lignes par l'emploi des coordonnées elliptiques de la ligne droite. C'est donc surtout comme vérification que je présente ici cette application.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_6$ sont les six coordonnées orthogonales de M. Klein liées, comme on sait, par l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=6} x_i^2 = 0, \tag{1}$$

les complexes du second degré compris dans l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=6} \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 0, \tag{2}$$

où λ est un paramètre arbitraire, ont même surface de singularités.

Cette surface est du quatrième ordre et a seize points doubles.

Lorsque, dans l'équation (2), on regarde les x comme donnés, on est en présence d'une équation en λ qui se réduit au quatrième degré, en vertu de la relation (1). Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ les racines de cette équation. Ces quatre quantités sont les coordonnées elliptiques de la ligne droite introduites par M. Klein.

Le moment élémentaire, qui est de la forme

$$M = g \Sigma dx_i^2$$

avec les six coordonnées primitives, devient, avec les nouvelles coordonnées,

$$M = G \sum_{i=1}^{i=4} \frac{\theta'(\lambda_i)}{\varphi(\lambda_i)} d\lambda_i^2,$$

---

(1) *Math. Annalen*, t. V, *loco citato*.

où G est une fonction qui importe peu, et

$$\theta(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4),$$
$$\varphi(\lambda) = (\lambda-a_1)(\lambda-a_2)\dots(\lambda-a_6).$$

Supposons que l'on fasse $\lambda_3 = \lambda_4$. On définit ainsi un complexe; et il est aisé de voir que ce complexe est singulier. En appelant, en effet, G_0 ce que G devient pour $\lambda_3 = \lambda_4$, on a, pour le moment,

$$(e) \qquad \mathrm{M} = G_0(\lambda_1-\lambda_2)^2\left[\frac{(\lambda_1-\lambda_3)^2}{\varphi(\lambda_1)}d\lambda_1^2 + \frac{(\lambda_2-\lambda_3)^2}{-\varphi(\lambda_2)}d\lambda_2^2\right].$$

Le complexe est donc singulier, et, comme le quotient

$$\frac{(\lambda_1-\lambda_3)^2}{\varphi(\lambda_1)} : \frac{(\lambda_2-\lambda_3)^2}{\varphi(\lambda_2)}$$

ne se réduit pas à une simple fonction de λ_1, λ_2, l'enveloppe ne peut être qu'une surface effective, et nullement une développable ou une courbe. Cette surface est, du reste, la surface de singularité des complexes représentés par l'équation (2) pour chaque valeur constante de λ. En effet, ce qui caractérise les droites singulières (tangentes à la surface de singularités), c'est que l'on ait, en même temps que (2), l'équation

$$(3) \qquad \sum\left(\frac{x_i}{a_i-\lambda}\right)^2 = 0 \quad (^1).$$

Or l'équation (3) exprime que, si l'on se donne une telle droite, l'équation (2), considérée comme une équation en λ, admet deux racines égales, et réciproquement.

Si l'on se reporte alors à l'équation (e) et aux résultats ci-dessus obtenus, on voit que les équations

$$\lambda_1 = \lambda_3, \qquad \lambda_2 = \text{const.},$$

d'une part, et, d'autre part,

$$\lambda_2 = \lambda_3, \qquad \lambda_1 = \text{const.}$$

---

(1) En effet, si $f(x_1, x_2, \dots, x_6) = 0$ est l'équation d'un complexe, les droites singulières sont définies par l'équation

$$\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = 0.$$

représenteront respectivement les deux séries de tangentes asymptotiques de la surface de singularités.

C'est bien là le résultat élégant obtenu pour la première fois par M. Klein.

IV. — *Application à la transformation des lignes asymptotiques en lignes de courbure.*

19. Dans mon Mémoire, déjà cité et inséré au Tome XI de la deuxième Série des *Annales de l'École Normale*, j'ai montré qu'il existe toujours un système de coordonnées de la ligne droite qui fait prendre au moment élémentaire dans l'espace la forme

$$G(du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 + du_4^2),$$

où G est un certain facteur dont la forme importe peu.

Supposons que l'on soit parvenu à résoudre l'identité

$$(I) \qquad du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 + du_4^2 = A\,d\xi^2 + B\,d\eta^2,$$

c'est-à-dire à exprimer u_1, u_2, u_3, u_4, A et B en fonction de *trois* variables indépendantes ξ, η, ζ, de sorte que l'identité (I) ait lieu.

Puisque (u_1, u_2, u_3, u_4) dépendent de trois variables seulement, la droite dont elles représentent les coordonnées se meut dans un complexe, et la forme que prend le moment de ce complexe, en vertu de l'identité (I), fait voir que ce complexe est singulier.

De plus, en vertu des résultats obtenus dans le cours de ce travail, les lignes asymptotiques de la surface enveloppe seront immédiatement connues.

Ainsi, chaque fois qu'on aura rencontré une solution (entendue, comme il a été dit) *de l'identité* (I), *on aura, par cela seul, une surface sur laquelle les lignes asymptotiques seront connues.*

Mais l'identité (I) peut être interprétée différemment. Écrivons-la ainsi

$$(I) \qquad du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 = (i\,du_4)^2 + A\,d\xi^2 + B\,d\eta^2.$$

Rien n'empêche de supposer que l'on a pris pour variables

$$\xi, \quad \eta \quad \text{et} \quad \zeta = iu_4.$$

Résoudre l'identité (I) revient alors à trouver u_1, u_2, u_3 en fonction de ξ,

η, ζ, de façon à avoir

$$(I) \qquad du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 = d\zeta^2 + A\,d\xi^2 + B\,d\eta^2.$$

Si l'on regarde alors u_1, u_2, u_3 comme des coordonnées rectilignes rectangulaires dans l'espace, on reconnaît l'équivalence de la résolution de l'identité (I) avec la recherche d'un certain système de coordonnées curvilignes faisant prendre au carré ds^2 de l'élément linéaire la forme

$$ds^2 = d\zeta^2 + A\,d\xi^2 + B\,d\eta^2.$$

On aperçoit tout de suite que les courbes $\xi =$ const., $\eta =$ const. sont des géodésiques sur les surfaces $\xi =$ const. et sur les surfaces $\eta =$ const. Comme les normales de ces deux surfaces sont à angle droit, cela exige que la normale principale de chaque ligne $\xi =$ const., $\eta =$ const. soit indéterminée en chaque point, ou que ces lignes soient des droites. Le système triplement orthogonal dans l'espace est alors formé d'un système de surfaces parallèles et de leurs deux systèmes de normalies développables. On peut donc dire aussi que, dès que l'on aura trouvé une solution de l'identité (I), *on aura immédiatement un système de surfaces parallèles dans lequel on connaîtra les lignes de courbure.*

Une double interprétation de l'identité (I) nous conduit donc à la remarquable relation que M. Sophus Lie a découverte entre les lignes asymptotiques et les lignes de courbure. Il n'est pas difficile, en effet, de se rendre compte que la relation que nous venons de rencontrer revient dans la forme aussi bien que dans le fond à la transformation de contact par laquelle M. Lie effectue le passage d'une théorie à l'autre.

V. — *Sur les complexes singuliers de sphères.*

20. Ainsi que je l'ai indiqué dans une Note à l'Académie, cette transformation de contact permet d'étendre tous les résultats précédents aux complexes de sphères. Il est, du reste, facile de traiter la question directement.

Adoptons pour coordonnées d'une sphère les coordonnées rectangulaires X, Y, Z de son centre et la longueur H de son rayon. La forme

$$F = dX^2 + dY^2 + dZ^2 - dH^2,$$

dont l'évanouissement exprime le contact de deux sphères infiniment voi-

sines, joue, dans la théorie des sphères, un rôle analogue à celui du moment dans l'espace réglé.

Pour un complexe de sphères, la forme F devient une forme ternaire, et l'évanouissement identique du discriminant de cette forme indique que le complexe est singulier, c'est-à-dire que toutes les sphères du complexe ont une enveloppe.

Supposons d'abord que cette enveloppe soit une surface quelconque sur laquelle les lignes de courbure seront distinctes et représentées par les équations $\xi =$ const., $\eta =$ const. Les coordonnées x, y, z d'un point de la surface seront des fonctions de ξ, η; je désignerai par λ, μ, ν les cosinus directeurs d'un sens de parcours choisi sur la normale.

Les coordonnées de l'une quelconque des sphères du système peuvent être représentées par les formules

$$X = x - H\lambda,$$
$$Y = y - H\mu,$$
$$Z = z - H\nu,$$

en adoptant ξ, η, H pour variables indépendantes.

La différentiation donnera

$$dX = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} - H\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}\right)d\xi + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} - H\frac{\partial \lambda}{\partial \eta}\right)d\eta - \lambda\, dH;$$

mais, comme $\xi =$ const., $\eta =$ const. sont les lignes de courbure, en représentant par R_1, R_2 les rayons de courbure principaux, on aura

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \xi} = \frac{1}{R_1}\frac{\partial x}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} = \frac{1}{R_2}\frac{\partial x}{\partial \eta};$$

d'où, par conséquent,

$$dX = \frac{\partial x}{\partial \xi}\left(1 - \frac{H}{R_1}\right)d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}\left(1 - \frac{H}{R_2}\right)d\eta - \lambda\, dH;$$

d'où l'on conclut

$$F = dX^2 + dY^2 + dZ^2 - dH^2 = \left(1 - \frac{H}{R_1}\right)^2 E\, d\xi^2 + \left(1 - \frac{H}{R_2}\right)^2 G\, d\eta^2;$$

en posant avec Gauss

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2,$$
$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2$$

et se rappelant que

$$\lambda \frac{\partial x}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial y}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0,$$

$$\lambda \frac{\partial x}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial y}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0.$$

La forme F étant ramenée au type

$$F = \left(1 - \frac{H}{R_1}\right)^2 E\, d\xi^2 + \left(1 - \frac{H}{R_2}\right)^2 G\, d\eta^2,$$

on reconnaît immédiatement qu'elle appartient au groupe des formes linéo-involutives.

On voit en même temps que les deux groupes d'équations

$$1 - \frac{H}{R_1} = 0, \qquad \eta = \text{const.}$$

et

$$1 - \frac{H}{R_2} = 0, \qquad \xi = \text{const.}$$

définissent chacun une famille de sphères principales et, par conséquent, de lignes de courbure.

21. Le seul cas particulier qui puisse se présenter, c'est celui où les deux facteurs de la forme F seraient tous deux intégrables; il faudrait, pour cela, que le quotient

$$\left(\frac{1 - \frac{H}{R_1}}{1 - \frac{H}{R_2}}\right)^2$$

fût indépendant de H, ce qui exige que $R_1 = R_2$.

Donc :

C'est lorsque le complexe sera formé des sphères tangentes à une sphère fixe, que la forme F *sera réductible au troisième type des formes*

linéo-involutives

$$F = g\,d\xi\,d\eta.$$

22. Lorsque le complexe est formé des sphères tangentes à une courbe, la forme appartient encore au type *linéo-involutif*, comme il est aisé de le montrer ([1]).

Soient x, y, z les coordonnées d'un point de la courbe directrice, exprimées en fonction de l'arc, a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale, enfin $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{T}$ et s la courbure, la torsion et l'arc.

Les coordonnées du centre de l'une quelconque des sphères de rayon H du système peuvent être représentées par les formules

$$\begin{aligned} X &= x - (b\cos\theta + c\sin\theta)H,\\ Y &= y - (b'\cos\theta + c'\sin\theta)H,\\ Z &= z - (b''\cos\theta + c''\sin\theta)H, \end{aligned}$$

en adoptant pour variables s, θ et H. La signification de θ est évidente, c'est l'angle que fait, avec la normale principale, le rayon de la sphère qui va au point de contact.

On tire de ces formules

$$F = dX^2 + dY^2 + dZ^2 - dH^2 = H^2\left[\left(\frac{ds}{T} - d\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{H} - \frac{\cos\theta}{R}\right)^2 ds^2\right]$$

ou, en posant $\theta - \int \frac{ds}{T} = u$,

$$F = dX^2 + dY^2 + dZ^2 - dH^2 = H^2\,du^2 + \left(1 - \frac{H}{R}\cos\theta\right)^2 ds^2.$$

Cette dernière forme appartient essentiellement au type linéo-involutif général, quelque hypothèse que l'on fasse sur la courbe enveloppe.

Dans ce cas, les sphères principales sont définies, d'une part, par les équations

$$u = \theta - \int \frac{ds}{T} = \text{const.}, \qquad \frac{1}{H} = \frac{\cos\theta}{R};$$

([1]) C'est à tort que, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, j'ai rattaché ce cas à celui où l'un des deux facteurs de la forme est intégrable.

le lieu des centres de ces sphères est la surface polaire, et l'on retrouve ainsi la théorie ordinaire des développées.

Le second système de sphères principales est donnée par les équations

$$s = \text{const.}, \qquad H = 0;$$

on obtient ainsi les sphères de rayon nul dont les centres sont sur la courbe considérée.

23. Il reste, enfin, un dernier cas que j'ai laissé de côté. Dans l'étude des sphères tangentes à une surface, j'ai supposé distinctes les lignes de courbure. Or Monge a trouvé des surfaces imaginaires dont les lignes de courbure des deux séries coïncident.

Les tangentes aux lignes de courbure divisent harmoniquement les tangentes isotropes de la surface; la coïncidence des lignes de courbure entraîne donc leur coïncidence avec l'un des systèmes de lignes de longueur nulle tracées sur la surface. Les tangentes aux lignes de courbure divisant aussi harmoniquement les tangentes asymptotiques, leur coïncidence ne peut s'effectuer qu'autant qu'elles viennent coïncider avec un système de lignes asymptotiques. Sur les surfaces considérées, il faudra donc qu'un système de lignes asymptotiques soit formé de lignes de longueur nulle. Comme le plan osculateur d'une ligne de longueur nulle touche toujours le cercle de l'infini, à moins que cette ligne ne soit droite, et que, par conséquent, tout plan tangent à la surface considérée devrait être tangent au cercle de l'infini, il faut ou bien que la surface soit une développable circonscrite au cercle de l'infini, ou bien qu'elle soit engendrée par une droite qui rencontre constamment ce cercle. Du reste, il est bien clair que le premier cas rentre dans le dernier. Donc, en résumé :

Toute surface à lignes de courbure coïncidentes est réglée, et ses droites coupent toutes le cercle de l'infini.

D'après cela, les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point d'une telle surface pourront être représentées par les formules

$$\begin{aligned} x &= \cos\xi.\eta + p, \\ y &= \sin\xi.\eta + q, \\ z &= \eta\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

où p et q sont deux fonctions de la variable indépendante ξ.

Comme précédemment, une sphère quelconque tangente à la surface pourra se représenter par les formules

$$X = x - \lambda H,$$
$$Y = y - \mu H,$$
$$Z = z - \nu H,$$

où λ, μ, ν sont encore les cosinus directeurs de la normale.

On tire de ces formules

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 - dH^2 = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} - H\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}\right)^2 d\xi^2$$
$$+ 2\sum\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} - H\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} - H\frac{\partial \lambda}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta$$
$$+ \sum\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} - H\frac{\partial \lambda}{\partial \eta}\right)^2 d\eta^2.$$

Mais, si l'on a égard aux expressions de x, y, z en fonction de ξ, η, on trouve que le coefficient de $d\eta^2$ disparaît, et il reste

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 - dH^2 = (g\, d\xi + h\, d\eta)\, d\xi,$$

ce qui prouve bien que la forme appartient alors au *second type* des formes *linéo-involutives*.

Le cas où l'enveloppe des sphères est une surface de Monge correspond donc *à lui seul* au cas de l'espace réglé, où l'enveloppe d'un complexe singulier est une surface développable ou bien une courbe ([1]).

24. Les sphères sont des surfaces de Monge et même de deux façons différentes, puisqu'elles sont engendrées de deux manières par le déplacement d'une droite isotrope.

Nous avons déjà rencontré ce cas au n° 21, et l'on constate facilement que ce cas est le seul où le facteur

$$g\, d\xi + h\, d\eta$$

admette un facteur intégrant ([2]).

([1]) Cela résulte aussi de l'application de la transformation de M. S. Lie.

([2]) Si l'on cherche à déterminer p et q en fonction de ξ de sorte que $g\, d\xi + h\, d\eta$ soit

En résumé :

1° Dans un complexe singulier de sphères tangentes à une surface quelconque, ou à une courbe quelconque, la forme quadratique fondamentale appartient au type général linéo-involutif, et la réduction de cette forme au type canonique coïncide avec la détermination des sphères principales.

2° Si l'enveloppe des sphères du complexe est une surface de Monge (et seulement dans ce cas), la forme appartient au second type linéo-involutif; l'un de ses facteurs est intégrable.

3° Enfin, lorsque l'enveloppe est une sphère (et seulement dans ce cas), la forme appartient au troisième type, et ses deux facteurs sont intégrables.

---

intégrable, on trouve qu'il faut prendre

$$p = a \sin \xi + b, \qquad q = -a \cos \xi + c,$$

où a, b, c sont trois constantes. Si on élimine alors ξ, η entre les trois équations du bas de la page 41, on trouve la sphère $(x-b)^2 + (y-c)^2 + z^2 = a^2$.

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES

SUR

LE RAYONNEMENT,

PAR M. P. GARBE,

Chargé de cours à la Faculté des Sciences de Poitiers.

INTRODUCTION.

Lorsqu'un corps solide, placé dans le vide, est porté à des températures graduellement croissantes, l'énergie rayonnée par ce corps va en augmentant, et en même temps la nature du flux rayonné se modifie. Draper (¹) et, après lui, d'autres physiciens ont montré, en effet, qu'à mesure que le corps s'échauffe et pendant que les radiations qui composent son rayonnement augmentent de plus en plus d'intensité, de nouvelles radiations apparaissent en suivant l'ordre des réfrangibilités croissantes. Le problème du rayonnement contient donc, comme facteurs, trois quantités qu'il y a lieu de considérer comme intimement liées les unes aux autres : la température du corps, l'énergie totale rayonnée et l'intensité de chaque radiation dans ce flux total.

Depuis Newton et surtout après les remarquables travaux de Dulong et Petit, on a spécialement donné le nom de *loi du rayonnement* à la relation qui existe entre les deux premières de ces quantités, et les efforts de presque tous les physiciens qui se sont occupés de cette question se sont portés sur l'établissement de cette loi. La formule donnée par Newton, $R = mat$, n'a pas tardé à être reconnue inexacte pour des excès de température un peu notables; elle a été remplacée par celle de Dulong et Petit, $R = ma^{\theta}(a^{t} - 1)$,

(¹) *Philosophical Magazine*, t. XXX; 1847.

qui, en introduisant comme facteur la température θ de l'enceinte, s'accorde avec l'expérience tant que l'excès t ne dépasse pas 300° environ. Au delà de cette limite, cette loi elle-même a été reconnue inexacte par plusieurs expérimentateurs et récemment par M. Rivière [1], dont les résultats, obtenus pour des excès de température qui vont jusqu'à 1000°, n'ont pas été traduits en formule.

D'autres relations ont été substituées à celle de Dulong et Petit.

D'après M. Stefan [2], si l'on désigne par T la température absolue du corps, par t celle de l'enceinte dans laquelle il se refroidit, le rayonnement dans le vide est donné par la formule

$$R = A(T^4 - t^4),$$

c'est-à-dire que le rayonnement absolu d'un corps est proportionnel à la quatrième puissance de sa température absolue. Cette loi rend parfaitement compte des résultats de Dulong et Petit et s'accorde surtout avec ceux obtenus par de La Provostaye et Desains; mais les expériences de M. Rivière et celles plus récentes de M. Schleiermacher [3] montrent qu'aux températures élevées elle s'écarte de l'observation en sens inverse de la loi de Dulong et Petit, c'est-à-dire que le coefficient A, au lieu de demeurer constant, devrait aller en augmentant avec la température. Faut-il rejeter, de ce chef, la loi de Stefan, ou bien devons-nous admettre que A varie, en effet, avec la température? D'après la loi de Kirchhoff, A est une quantité proportionnelle au pouvoir absorbant du corps à la température considérée; or, si la constance de cette quantité caractérise un corps parfaitement noir, il faut reconnaître que la plupart des substances sont loin de satisfaire à cette condition et que, pour le platine, en particulier, cette quantité augmente de plus du double de sa valeur de 100° à 1000° [4].

D'ailleurs il est à remarquer que cette loi de Stefan vient de trouver un appui considérable dans les recherches théoriques de M. Boltzmann [5]. Ce savant, en appliquant, après M. Bartholi, au rayonnement calorifique le second principe de la Thermodynamique et en combinant les résultats ainsi

---

(1) *Annales de l'École Normale;* 1884.
(2) *Wien. Ber.*, 79 (II), p. 391; 1879.
(3) *Wiedemann's Annalen*, Bd. 26, S. 287.
(4) Nichols, *Ref. in Beibl.*, 3, p. 864; 1879.
(5) *Wiedemann's Annalen*, Bd. 22, S. 291.

obtenus avec d'autres fournis par la théorie électromagnétique de la lumière, est arrivé précisément à la relation de Stefan. Il y a là plus qu'un hasard heureux, et il est permis de penser que cette loi pourra être vérifiée expérimentalement si l'on opère avec un corps se rapprochant plus que le platine du corps noir absolu et à des températures assez élevées pour que les corrections, toujours incertaines, relatives à l'enceinte, puissent être négligées sans erreur appréciable.

Une seconde relation doit exister entre la température du corps et l'intensité d'une radiation simple constitutive du rayonnement, et il est clair que la connaissance de cette loi entraînerait, par une intégration relative à la longueur d'onde, la connaissance de la première. Aussi a-t-elle été l'objet d'un certain nombre de recherches qui ont surtout porté sur les radiations lumineuses, lesquelles sont plus facilement accessibles à l'expérience. M. E. Becquerel, dans un travail considérable sur l'irradiation des corps incandescents (¹), a trouvé que l'intensité des radiations rouge, verte et bleue, transmises par des verres colorés, varie avec la température suivant une loi exponentielle analogue à celle de Dulong et Petit

$$r = a(e^{b(\mathrm{T}-\theta)} - 1),$$

dans laquelle θ désigne la température à laquelle prennent naissance les radiations considérées, e la base des logarithmes adoptés, b représentant ainsi le logarithme de la base des exponentielles, lequel, d'après les expériences, semble varier en raison inverse des longueurs d'onde.

Dans une série d'expériences effectuées dans ces dernières années, M. Violle (²) a repris la question à ce même point de vue, et il a trouvé que la radiation du platine incandescent dans l'air pouvait s'exprimer par la formule

$$r = m\mathrm{T}\,b^{\mathrm{T}^2}a^{\mathrm{T}},$$

dans laquelle T est la température absolue du corps, b une constante, a une fonction du premier degré de la longueur d'onde et qui s'annule pour $\lambda_1 = 0^{\mathrm{mm}},1$ environ et m un coefficient fonction de la longueur d'onde qui, dans un flux total, peut servir à caractériser l'intensité calorifique relative de chaque radiation. Par conséquent, à une température T, le flux total

(¹) *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. LXVIII; 1863.
(²) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCII, p. 1206.

peut être représenté par l'intégrale

$$R = T b^{T^2} \int_0^{\lambda_1} m a^T d\lambda,$$

dans laquelle m est une quantité qui reste à déterminer pour chaque valeur de λ.

Est-il permis d'admettre, avec M. Christiansen (1), que la loi de Stefan, supposée vraie pour le flux total, s'applique à chaque radiation simple, c'est-à-dire que l'intensité de ce flux puisse être mise sous la forme

$$T^4 \int_0^\infty \varphi(\lambda) d\lambda \, ?$$

Ce serait admettre que l'intensité relative des diverses radiations se maintient dans toute l'échelle des températures; en d'autres termes, que la composition du flux n'éprouve aucune modification lorsque la température change. Or les expériences de Draper, celles de M. E. Becquerel, les résultats précédemment cités de M. Violle et enfin ceux du présent travail montrent qu'une telle supposition est inadmissible.

Il existe donc, dans le flux total, une loi de variation propre à chaque espèce de radiations : c'est le troisième point de vue auquel on peut se placer pour envisager le problème du rayonnement.

En s'affranchissant ainsi de la considération de température, on élimine une grandeur qui, par son évaluation toujours très délicate aux termes élevés de l'incandescence du corps, impossible même au delà de la température où la porcelaine se ramollit, augmente, dans le premier cas, la difficulté des observations et s'oppose, dans le second, à ce qu'elles soient poussées jusqu'à ces limites où il est si intéressant de pouvoir suivre le phénomène. Il est clair, d'ailleurs, que, cette relation une fois trouvée, il sera possible d'en déduire la loi de variation d'une radiation avec la température, si l'on admet connue la première loi. En effet, des relations

$$R = \chi(T),$$
$$r = \psi(R, \lambda),$$

on déduira

$$r = \varphi(\lambda, T).$$

(1) *Wiedemann's Annalen*, Bd. 19, S. 268.

En particulier, si l'on considère, pour une température T, deux radiations de longueurs d'onde λ_1, λ_2, on aura

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\varphi(\lambda_2, T)}{\varphi(\lambda_1, T)},$$

et cette dernière relation pourra servir à définir la température T, d'après la loi supposée exacte à toute température $R = \chi(T)$ et jusqu'aux températures les plus élevées qui auront été atteintes dans les expériences de détermination de la fonction ψ.

Les résultats obtenus sur ce point sont peu nombreux : les expériences de Draper (¹) sur un fil de platine rendu incandescent, dans l'air, par le passage d'un courant; celles de Zöllner (²), dans lesquelles on compare l'effet calorifique à l'action lumineuse totale, n'ont trait que d'une manière indirecte au sujet actuel. M. E. Becquerel, dans le travail déjà mentionné, s'est occupé incidemment de cette question, et il arrive à la conclusion suivante : « Si l'on compare la quantité M de chaleur émise dans l'unité de temps à l'intensité de la lumière émise par un rayon de couleur homogène, on reconnaît qu'à partir de la limite de 480° à 490°, à laquelle les rayons lumineux commencent à être émis, l'intensité lumineuse des rayons rouges croît beaucoup plus rapidement que la quantité de chaleur, sans qu'il y ait aucune loi simple qui lie ces deux quantités l'une à l'autre. Entre les limites des expériences, et si l'on nomme m la quantité de chaleur rayonnée au moment où le corps devient lumineux, on aura sensiblement

$$I = B(M - m)^3,$$

B étant un coefficient constant. »

La longueur d'onde moyenne du verre rouge employé par M. E. Becquerel était d'environ $0^{\mu},670$ et le rayonnement total était donné par une pile thermo-électrique placée dans le vide en même temps que la source incandescente.

Nous aurons l'occasion de revenir sur ces déterminations qui, bien qu'incomplètes, puisqu'elles ne portent que sur une radiation ou plutôt sur un ensemble de radiations transmises par le verre rouge, ont cependant conduit leur auteur à un type de formule qui, sauf les modifications que nous indi-

(¹) *Loc. cit.*

(²) *Photometrische Untersuchungen* (Basel; 1859).

querons dans la suite, paraît représenter le phénomène à tous les degrés d'incandescence du corps.

Dans ces derniers temps, l'apparition des lampes à incandescence a forcément ramené l'attention et les recherches sur le rapport qui pouvait exister entre l'énergie électrique dépensée dans ces lampes et leur pouvoir lumineux; toutefois les expériences qui ont été faites dans cette voie s'éloignent, par leur caractère particulièrement pratique, de l'ordre d'idées suivi dans ce travail. C'est ainsi que M. le Dr Voit représente par la formule $L = aA^3$ la relation entre l'énergie A et l'intensité lumineuse totale L. M. Goëtz [1], dans une étude sur les lampes Crutto, remplace cette formule par la suivante : $L = aA + bA^2$. Cette dernière formule est appliquée par M. Shumann [2] aux radiations simples; mais si, au point de vue pratique, elle peut être considérée comme suffisamment exacte, du moins pour les degrés élevés d'incandescence, il est clair qu'elle est peu propre à mettre en évidence les propriétés particulières à chaque radiation dans le phénomène du rayonnement.

Ce travail a été fait au laboratoire de Physique de la Faculté des Sciences de Montpellier. M. Crova a mis avec empressement à ma disposition les ressources de son laboratoire et jusqu'à ses appareils particuliers de recherche : je suis heureux de pouvoir l'en remercier ici.

---

(1) *Centralblatt für Electrotechnik*, n° 33.
(2) *Electrotechnische Zeitschrift;* mai 1884.

PREMIÈRE PARTIE.

MÉTHODE EXPÉRIMENTALE. — MESURES ÉLECTRIQUES. — DÉTERMINATIONS PHOTOMÉTRIQUES. — DISPOSITION GÉNÉRALE DES APPAREILS.

I. — Méthode expérimentale.

Draper, M. E. Becquerel et M. Zöllner ont employé, comme corps incandescent, un fil de platine porté à des températures de plus en plus élevées par le passage d'un courant. On a préféré, dans les recherches qui vont suivre, prendre le filament de charbon tel qu'il se trouve disposé dans les lampes à incandescence. Le charbon étant un corps noir et mat à l'état ordinaire, on peut espérer que les propriétés de sa surface resteront les mêmes à tous les degrés d'incandescence et qu'ainsi le phénomène du rayonnement ne se compliquera pas d'une variation dans le pouvoir émissif aux différentes températures. En outre, le phénomène pourra être suivi jusqu'à des températures bien supérieures à celle de la fusion du platine. Enfin, le charbon étant moins bon conducteur de la chaleur que les métaux, l'influence refroidissante des points d'attache du filament est beaucoup moins considérable qu'avec le platine et devient négligeable pour des filaments de quelques centimètres de longueur seulement. Ces lampes, ou du moins certains types d'entre elles, sont d'ailleurs immédiatement disposées pour l'expérience, puisque le vide y a été fait, préalablement, avec le plus grand soin, au moment de leur construction.

La méthode employée consiste à évaluer le rayonnement total par le travail électrique dépensé dans la lampe et à déterminer au spectrophotomètre l'intensité lumineuse d'une radiation par rapport à l'intensité de cette même radiation dans une source auxiliaire supposée constante. M. E. Becquerel, dans le travail cité précédemment, a préféré mesurer le rayonnement par l'intensité du courant développé dans une pile thermo-électrique soumise à ce rayonnement. Il a eu soin, d'ailleurs, de vérifier préalablement la proportionnalité entre cette intensité et le travail électrique évalué directement.

Aujourd'hui, que les appareils de mesures électriques permettent d'obtenir avec une grande approximation les éléments de ce travail, il m'a paru plus exact, sinon plus rapide, de mesurer, pour chaque état de la lampe, l'intensité du courant qui la traverse et la différence des potentiels à ses bornes. Du produit de ces deux quantités on déduit, par la loi de Joule, la quantité de chaleur dégagée dans le filament pendant l'unité de temps. Il faut remarquer, toutefois, que cette relation fondamentale n'a été établie expérimentalement par Joule et vérifiée ensuite par Lenz que dans le cas où le fil traversé par le courant, étant placé au contact du liquide du calorimètre, dont la température s'élevait peu, ne devenait jamais incandescent. Il était donc utile de faire, au préalable, cette vérification sur un fil librement incandescent comme il doit l'être dans les expériences de rayonnement et en se servant des appareils calorimétriques auxquels on peut accorder le plus de confiance.

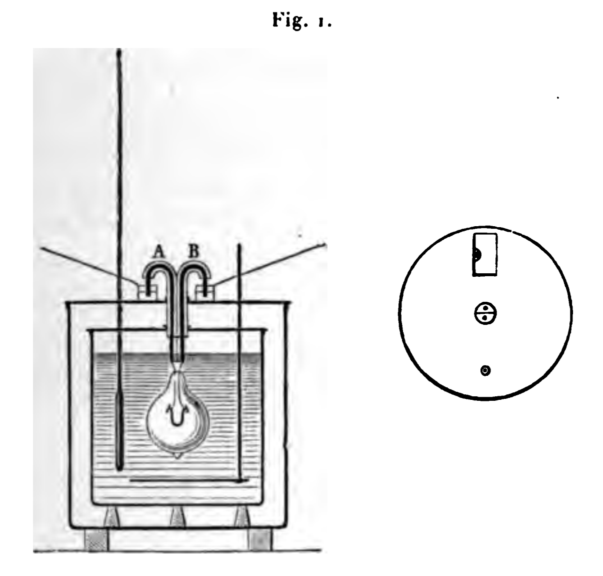
Vérification de la loi de Joule dans le cas des fils incandescents.

Le calorimètre employé est celui de M. Berthelot : il est en platine, d'une contenance de 600^{cc} environ, protégé contre le refroidissement par un premier vase métallique et une enceinte extérieure remplie d'eau. Deux thermomètres Baudin, donnant le $\frac{1}{50}$ de degré par division de $0^{m},001$ environ, plongent, l'un dans l'enceinte extérieure dont la température ne doit varier que très peu dans l'intervalle de temps d'une expérience, l'autre dans le calorimètre par l'ouverture rectangulaire du couvercle.

La lampe à incandescence sur laquelle on opère est suspendue au sein du calorimètre par deux gros fils de cuivre recouverts de gutta, qui traversent ensemble les ouvertures centrales des couvercles et viennent plonger, à leur sortie, dans deux godets A, B (*fig.* 1) remplis de mercure où aboutissent également les fils de l'électromètre. Deux autres godets, situés en face des premiers, reçoivent les fils conducteurs du courant, assez gros pour ne pas s'échauffer pendant l'expérience. Les mesures électriques d'intensité et de différence de potentiel sont faites avec les appareils dont la description trouvera sa place plus loin. Le calorimètre avait été d'abord rempli d'eau distillée, en vue de mesures absolues ; mais on s'est aperçu que, pour de fortes intensités du courant, des traces d'électrolyse se manifestaient entre les fils voisins de la lampe à incandescence et l'on a dû employer un liquide plus isolant. L'alcool à 95° isole parfaitement dans ces conditions et n'est pas

assez hygrométrique pour troubler les expériences. Sa chaleur spécifique n'est pas connue exactement, il est vrai ; mais cette donnée est inutile, du

Fig. 1.



moment qu'il n'est besoin d'obtenir que les quantités relatives de chaleur dégagées. L'appareil calorimétrique était placé dans une chambre presque obscure, sans fenêtres et ne recevant le soleil d'aucun côté.

Les expériences étaient faites le matin : de cette façon l'équilibre de température avait eu le temps de s'établir pendant la nuit entre les différentes parties de l'appareil. D'après la nature du phénomène calorifique à mesurer, il semblait naturel d'appliquer la méthode de compensation de Rumford, en portant d'abord l'eau de l'enceinte extérieure à une température supérieure de 1° environ à celle du calorimètre, puis en faisant passer le courant dans la lampe jusqu'à ce que la température du calorimètre fût de 1° au-dessus de celle de l'enceinte ; mais ici, comme dans la plupart des cas, ainsi que l'a montré M. Berthelot, ce mode de correction est illusoire. D'abord, en disposant ainsi de la température initiale, on trouble l'état d'équilibre dont il vient d'être parlé et que l'expérience montre être si propice à l'exactitude des déterminations. En outre, malgré l'agitation du liquide du calorimètre, la température ne cesse pas brusquement de monter aussitôt après la rupture du courant, et, par suite, la marche ascendante des températures dans le calorimètre ne peut être arrêtée à volonté à une valeur fixée d'avance. Enfin il a semblé qu'une méthode de correction basée sur la loi du rayon-

nement ne pouvait s'appliquer en toute rigueur au système complexe formé par le calorimètre et l'enceinte extérieure séparés par deux couches d'air et une cloison métallique. En se plaçant, au contraire, dans les conditions indiquées par M. Berthelot et en ayant soin que l'élévation de température du calorimètre ne dépasse pas 2°, la correction de rayonnement est insignifiante et le seul refroidissement qu'éprouve le liquide est dû à la faible évaporation de l'alcool par suite de l'échauffement et de l'agitation. Pour tenir compte de ce refroidissement qui, bien que faible, n'est cependant pas négligeable, on a divisé la durée d'une expérience en deux périodes : l'une d'échauffement rapide correspondant au passage du courant dans la lampe, l'autre d'échauffement lent suivi de refroidissement.

On a appliqué à la première la moyenne des corrections initiale et finale et à la seconde la correction finale. Le Tableau suivant donne la marche et les résultats d'une expérience :

Expériences du 4 février 1884.

	Heure du chronomètre.	Températures. Enceinte.	Températures. Calorimètre.		Galvanomètre.	Électromètre.
	h m 8.26	° 11,25	° 11,29	correct. initiale :		
Départ	30	»	11,29	0°,000	217,9	
	31	»	11,65			
	32	»	»		405,3	59,6
Arrêt	33	»	12,80			
	34	»	87			
	35	»	89		217,1	
	36	»	89			
	37	»	883			
	38	»	880			
	39	»	875			
	40	»	870	correct. finale :		
	»	»	»	0°,006		
	42	11,28	12,858			

On voit par ce Tableau que la température de l'enceinte extérieure n'a varié que d'une façon insignifiante pendant la durée assez longue d'une expérience complète, et que cette variation ne peut avoir aucune influence sur la température du calorimètre, puisque, à l'origine, cette dernière restait fixe alors qu'il existait une différence de 0°,04 entre elle et la température de l'enceinte.

L'électromètre employé était celui de M. Lippmann et son indication

correspond à une force électromotrice de $0^{dll},228$; il était relié aux bornes de la lampe à travers 5^{dll}, de sorte que la différence de potentiel aux bornes est de $5^{dll},228$. Le calcul de l'expérience se fait de la façon suivante, en rapportant l'échauffement du calorimètre à ce qu'il serait si le courant avait traversé la lampe pendant dix minutes :

Déviation du galvanomètre.......... $\delta = 187,8$
Différence de potentiel............. $e = 5^{dll},228$

Correction moyenne pour 3^m........	0,009	0,051
» finale » 7^m........	0,042	
Température à $8^h 40$ (lue).................		12,870
» (corrigée)............		12,921

Élévation de température pour 3^m de passage.... $12°,921 - 11°,290 = 1°,631$
» 10^m » .... $\theta = 1,631 \times \frac{10}{3} = 5°,443$

$$\text{Rapport}\ldots \quad \frac{\delta e}{\theta} = 180,7.$$

En faisant varier l'intensité du courant et en même temps la durée du passage, on a obtenu les résultats suivants :

δ.	e.	θ.	$\frac{\delta e}{\theta}$.	Aspect du filament.
39	1,49	0,323	179,9	Complètement obscur.
140,5	4,083	3,189	179,8	Rouge sombre.
187,8	5,228	5,433	180,7	» vif.
231,4	6,25	8,02	180,3	Blanc éblouissant.

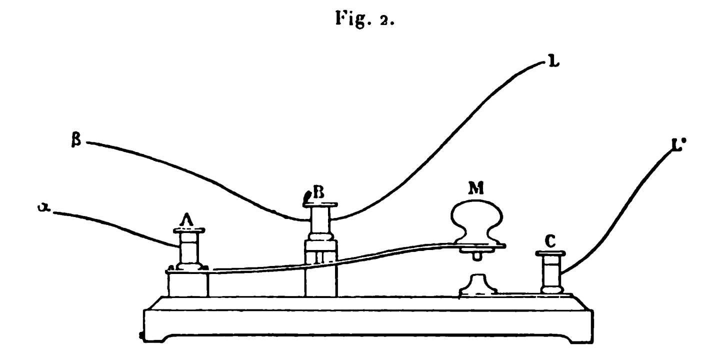
On voit, par ces nombres, que le rapport de l'énergie électrique dépensée à la quantité de chaleur dégagée au sein du calorimètre est constant. Cette chaleur représente l'énergie totale rayonnée, puisque la lampe est à l'intérieur d'un vase clos et opaque et que, par suite, toutes les radiations émises par le charbon sont retenues et absorbées dans l'appareil calorimétrique. La lampe qui a servi à ces expériences fonctionnait régulièrement avec 6^{volts} de différence de potentiel aux bornes ; elle a donc été surmenée dans les déterminations précédentes, et la vérification se trouve ainsi poussée jusqu'au terme le plus élevé de l'incandescence du filament de charbon, c'est-à-dire à un point où, comme on s'en est assuré au spectrophotomètre, la température optique de la lampe à incandescence est bien supérieure à celle du carcel.

II. — Mesures électriques.

Mesure de la différence de potentiel.

1° *Électromètre de M. Lippmann.* — La première partie des déterminations a été faite au moyen de l'électromètre de M. Lippmann, auquel on a pu substituer dans la suite l'électromètre Thomson, modifié par M. Mascart. J'indiquerai ici la manière dont ces deux appareils ont été employés. L'électromètre capillaire, fixé sur un support en bois, était solidement installé contre un des murs de la salle; l'extrémité supérieure du tube était mastiquée à l'une des branches d'un robinet en verre à trois voies dont la seconde branche était mastiquée au manomètre à mercure, tandis que la troisième correspondait à la poire en caoutchouc qui donnait la pression compensatrice. L'emploi de ce robinet permettait de séparer à un moment donné le tube de l'électromètre de la poire, pour le laisser seulement en communication avec le manomètre, et de conserver ainsi une pression invariable dans l'appareil. Les deux fils de l'électromètre venaient aboutir aux bornes d'une clef à trois prises A, B, C (*fig.* 2). Dans l'état de repos, les fils α, β sont en

Fig. 2.



contact et l'électromètre fermé sur lui-même; en appuyant sur la manette M, on relie les fils α, β aux bornes L, L' de la lampe. Sur le trajet des fils BL ou CL' se trouvaient placés en opposition de petits éléments Daniell en nombre suffisant pour que la différence de potentiel à l'électromètre fût inférieure à 1^{dll}. Un commutateur placé sur le trajet des fils Aα, Bβ permettait même de rendre cette différence inférieure à $0^{\text{dll}},5$ tout en conservant la polarisation par l'hydrogène dans le tube capillaire. Pour construire la courbe de graduation de cet appareil, on aurait pu s'adresser à la courbe donnée par M. Lippmann et déterminer la pression compensatrice correspondant au

daniell; mais l'emploi de cette courbe type suppose que l'on a satisfait à deux conditions: d'abord, l'identité du daniell employé avec celui qui a servi aux expériences de M. Lippmann, et l'on sait que cette identité n'est pas facile à obtenir en toute rigueur; et en outre l'emploi, dans l'électromètre, d'un acide de même concentration. Les électromètres à mercure ne sont, en effet, comparables que pour une même concentration de l'acide, ainsi qu'on peut le voir de la façon suivante. Soit x_0 la différence électrique au contact entre le mercure et l'eau acidulée, c'est-à-dire celle qui existe au ménisque lorsque l'appareil est fermé sur lui-même; soit e la force électromotrice variable interposée sur le trajet des fils de l'électromètre: la différence électrique au ménisque est alors

$$\delta = x_0 + e.$$

Pour une valeur e_m de e, la pression compensatrice passe par un maximum correspondant à une différence électrique

$$\Delta = x_0 + e_m.$$

Cette différence électrique, ainsi que l'a montré M. Lippmann, est constante quel que soit le liquide employé; donc, pour un autre liquide dont la différence au contact du mercure est x'_0, le maximum de pression compensatrice s'obtiendra pour une valeur e'_m de e différente de la première et satisfaisant à la relation

$$\Delta = x'_0 + e'_m.$$

Puisque, vraisemblablement, les valeurs de x_0 dépendent de la concentration, il faut s'attendre à ce que l'expérience donnera pour e_m des valeurs différentes et, par suite, les deux électromètres ainsi formés avec deux liquides distincts ne seront pas comparables. C'est d'ailleurs ce que montre le Tableau suivant, où D désigne la valeur en volts du daniell employé:

	Liquide.	$\frac{e_m}{D}$.
Eau acidulée au	$\frac{1}{5}$	0,833
»	$\frac{1}{10}$	0,777
»	$\frac{1}{20}$	0,723

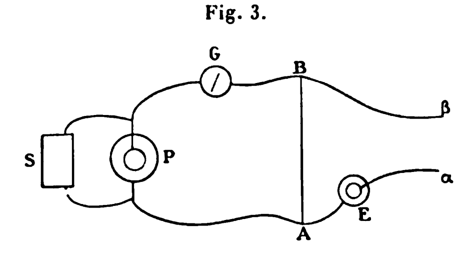
On peut même observer, ainsi que l'a montré M. Helmholtz, et comme j'ai eu l'occasion de le remarquer à propos de ces recherches, que la valeur de Δ n'est autre que zéro et que, par suite, les nombres précédents représentent

les différences au contact avec le mercure des liquides employés. Ces considérations suffisent à montrer que les conditions de comparabilité peuvent être difficiles à réaliser rigoureusement. Aussi M. Lippmann conseille-t-il, comme « aussi court et plus direct », de faire à chaque appareil sa graduation. Cette opération ne présente aucune difficulté lorsque l'on possède des boîtes de résistances bien construites. Il suffit, en effet, de placer dans le circuit de un ou deux éléments constants et de force électromotrice connue une résistance fixe et connue R et une boîte à résistance variable ρ aux extrémités de laquelle on attache les fils de l'électromètre. Soient r la résistance de la pile, E sa force électromotrice ; la différence de potentiel aux deux fils est, à chaque instant,

$$e = \frac{\rho}{r + R + \rho} E.$$

en supposant la résistance totale assez grande pour que ses variations n'influent pas sur la valeur de E. On peut encore se servir de la disposition élégante de M. Bouty, qui consiste dans l'emploi de deux boîtes de résistances identiques dont l'une est débouchée et l'autre bouchée complètement. A cette dernière aboutissent les fils de l'électromètre et le courant supposé constant traverse les deux boîtes. On enlève successivement des fiches de la seconde boîte pour les placer dans la position correspondante sur la première, de façon à conserver au circuit la même résistance. On a préféré employer la méthode suivante, qui supprime l'usage des boîtes de résistances et par suite leur vérification. Soit P une pile (*fig.* 3) munie d'un shunt S et

Fig. 3.



dont le courant traverse un galvanomètre G et une résistance constante AB de valeur arbitraire d'ailleurs. En A et B aboutissent les fils de l'électromètre, et sur l'un d'eux on place en opposition l'élément E en fonction duquel on veut graduer l'appareil. Si l'on désigne par ε la différence des potentiels en A et B, la force électromotrice e communiquée à l'électromètre sera

$$e = E - \varepsilon.$$

Soient r la résistance de AB et i l'intensité du courant qui traverse le galvanomètre ; on a

$$\varepsilon = ri$$

et, par suite,

$$(1) \qquad e = \mathrm{E} - ri.$$

Augmentons cette intensité, en modifiant le shunt, jusqu'à ce que l'électromètre revienne au zéro, et soit I l'intensité à cet instant ; nous aurons, en supposant que r n'ait pas varié,

$$(2) \qquad \varepsilon_1 = \mathrm{E} = r\mathrm{I}.$$

Des équations (1) et (2) on déduit

$$e = \mathrm{E}\left(1 - \frac{i}{\mathrm{I}}\right),$$

Ainsi, la valeur de e s'obtiendra à chaque instant par une lecture au galvanomètre et en fonction de E. La valeur de i était donnée par un galvanomètre à réflexion de Weber. La pile P n'a besoin d'être constante que pendant l'intervalle d'une lecture aux deux appareils ; en outre, l'élément d'opposition auquel on rapporte la graduation, ne travaillant que pour charger l'électromètre, peut être formé d'un étalon à grande résistance et à différence de potentiel bien définie. Quant à la variation possible de r par suite de l'échauffement du fil AB, il est facile de voir qu'elle est absolument négligeable, puisque cette résistance doit être prise assez grande pour qu'un galvanomètre sensible ne dévie que de quelques degrés, sous l'action du courant qui la traverse.

Ce mode de graduation par variation continue de la force électromotrice a permis de mettre en évidence une propriété remarquable de la courbe des pressions compensatrices, qui est d'être symétrique par rapport à l'ordonnée maximum. Toutefois cette symétrie disparaît et la courbe se déforme lorsque cette force électromotrice s'approche de celle qui détermine l'électrolyse persistante de l'eau acidulée. Mais on a vu précédemment que, en diminuant la concentration de l'acide, le maximum se rapprochait de l'origine et, par suite, il était à prévoir que la symétrie, dans ce cas, se manifesterait plus loin au delà de ce maximum. L'expérience est en effet très nette avec l'eau acidulée au $\frac{1}{10}$. Après avoir établi dans l'appareil une pression déterminée, on tourne le robinet à trois voies, de façon à mettre en communication seulement le tube capillaire et le manomètre, et, au moyen d'un

rhéostat à mercure et à vis micrométrique de M. Crova, faisant fonction de shunt sur la pile P, on détermine les deux valeurs e, e', en daniells, de la force électromotrice, qui amènent le ménisque au fil du réticule. Le Tableau suivant donne ces mesures conjuguées et leurs moyennes :

Pression compensatrice en millimètres de mercure.	e.	e'.	$\frac{e+e'}{2}$.
98,28	0,573	0,981	0,777
104,74	0,689	0,863	0,776
105,16	0,700	0,856	0,778
106,04	0,759	0,796	0,777
106,32 (max.)	0,778	0,778	0,778

Ce caractère de symétrie de la courbe est intéressant, puisque, joint à la relation $\Delta = 0$, il entraîne cette conséquence que la valeur de la constante capillaire est indépendante du signe de la différence électrique au ménisque. Au point de vue pratique, il a servi, par une mesure conjuguée, à déterminer, de temps en temps, la position du maximum. Lorsque, par suite de l'évaporation, la concentration de l'acide était modifiée et le maximum déplacé, on enlevait complètement le liquide et on le remplaçait par de l'eau acidulée conservée pour l'usage dans un flacon bien bouché et, par suite, de composition bien déterminée. Mais on ne peut songer à utiliser cette symétrie pour la construction de la courbe, d'abord parce que la portion de cette courbe qu'il est important de tracer avec soin est celle qui correspond aux forces électromotrices inférieures à $0^{dll},5$ et qu'elle se trouve ainsi en dehors de la partie symétrique, et, en outre, parce qu'il y a intérêt, au point de vue de la sensibilité de l'appareil, à faire usage d'un acide plus concentré que l'acide au $\frac{1}{10}$, afin d'éloigner autant que possible le maximum de l'origine.

2° *Électromètre Thomson-Mascart.* — Malgré la facilité de sa construction et la sûreté de ses indications, l'électromètre précédent a été remplacé, dans les mesures, par l'électromètre Thomson-Mascart lorsqu'on a pu l'avoir à sa disposition. Ce dernier offre, en effet, pour ces expériences, où la différence de potentiel n'a pas besoin d'être déterminée avec une extrême précision, l'avantage de donner cette quantité par une simple lecture, au lieu d'une opération toujours un peu longue, puisqu'elle nécessite l'emploi de daniells d'opposition. L'appareil était installé sur une console solidement fixée dans un des angles d'une salle voisine de la salle d'expériences photométriques. Cette console était recouverte d'une cage vitrée sur deux faces et dont l'un des panneaux, en forme de trappe, pouvait être soulevé pour

les lectures. Le toit de la cage porte deux disques d'ébonite au travers desquels passent deux tiges de cuivre munies de vis de serrage à leurs extrémités et, sur la partie de ces tiges extérieure à la cage, glissent deux godets renversés qu'on abaisse en dehors des expériences, pour préserver les disques d'ébonite de la poussière. Les fils qui viennent des bornes de la lampe et qui sont soigneusement isolés du sol aboutissent aux vis extérieures des tiges, tandis que les vis intérieures sont reliées à l'électromètre.

De cette façon l'appareil et sa pile de charge située à l'intérieur de la cage sont, autant que possible, mis à l'abri des poussières de la salle, et leurs différentes parties reçoivent, de ce fait, un isolement plus complet. Les lectures se font, par transparence, sur une règle en celluloïd placée au centre de courbure du miroir.

Une première remarque à faire au sujet de cet appareil, c'est que la position du zéro de l'aiguille n'est pas fixe et est sujette à des variations absolument irrégulières. Ce fait, qui a été constaté par bien des expérimentateurs, tient, sans doute, à plusieurs causes, et, en particulier, au mode d'attache de l'aiguille qui est simplement suspendue au bifilaire par un crochet. En fixant, par une goutte de mastic, ce crochet aux fils de suspension, on rend l'aiguille parfaitement solidaire de ces derniers, et l'on constate que les variations du zéro sont atténuées et disparaissent même complètement lorsqu'on n'exige pas de l'appareil une sensibilité trop grande. Mais alors il faut renoncer à modifier la sensibilité de l'électromètre par l'écartement des brins à leur partie supérieure; dans cette opération, en effet, les fils pourraient se tendre inégalement et l'action du bifilaire perdrait toute régularité. Aussi l'appareil est resté fixe après masticage du crochet et la partie supérieure a été recouverte, tant pour éviter l'introduction de la poussière que pour prévenir tout dérangement accidentel de la vis qui règle l'écartement des brins du bifilaire.

Une autre cause d'erreur résulte de l'emploi des piles de charge formées d'éléments zinc-platine et eau ordinaire. Ces éléments, comme on l'a constaté bien souvent ([1]), se polarisent avec la plus grande facilité et leur dépolarisation est extrêmement lente : une pile, fermée sur elle-même pendant quelques secondes, ne revient à son état primitif qu'après plusieurs heures et quelquefois davantage. On se rendra compte de la variation considérable de force électromotrice que peuvent subir ces éléments par le Tableau sui-

([1]) ANGOT, *Électromètres Thomson* (*Journal de Physique*, t. IV, p. 324).

vant, où δ_0 représente la déviation que subit l'aiguille lorsque, l'une des paires de secteurs étant au sol, l'autre paire est reliée à l'aiguille et à l'un des pôles d'une pile de charge de 50 éléments, dont l'autre pôle communique avec le sol :

Date.	δ_0.
20 décembre 1883	81
26 »	212
30 »	227

Le remède consisterait à employer des éléments impolarisables, tels que le daniell; mais on sait que la diffusion des liquides à travers le vase poreux amène sur le zinc une couche noirâtre dont la présence diminue dans un rapport notable la force électromotrice. Il conviendrait donc d'employer des éléments Daniell, dans lesquels la diffusion serait nulle, par exemple l'élément à grande résistance que M. Crova et moi avons publié sous le nom d'*étalon électrostatique de potentiel* (¹); mais il n'a pas été possible de disposer d'un nombre suffisant de ces éléments pour constituer la pile de charge et l'on a dû chercher un autre moyen de se mettre à l'abri des erreurs provenant de la polarisation des éléments ordinaires. Dans la pratique des observatoires ou même des laboratoires, on se borne à étalonner de temps en temps, tous les jours par exemple, l'appareil avec des daniells fraîchement montés; mais il est clair que, si des contacts accidentels viennent à polariser la pile de charge dans l'intervalle de ces opérations, l'opérateur n'en est pas averti et les expériences se trouvent, par là même, faussées (²). On pourrait supprimer complètement la pile de charge et opérer d'après la méthode de M. Joubert, en réunissant l'aiguille à l'une des paires de secteurs, et alors, en désignant par x la différence de potentiel des deux paires de secteurs et par α^2 la constante de l'instrument, la déviation δ de l'aiguille serait donnée par la formule approchée

$$\delta = \alpha^2 . x^2;$$

(¹) Crova et Garbe, *Journal de Physique*, 2ᵉ série, t. III, p. 299.

(²) M. Damien, dans une récente Communication (*Annales de Chimie et de Physique*, 6ᵉ série, t. VI, p. 289), a, de nouveau et très complètement, manifesté cette polarisation des éléments à un seul liquide et les erreurs qui peuvent en résulter dans la pratique de l'électromètre. Au lieu de se borner à étalonner l'appareil de temps en temps, il s'est astreint à le faire après chaque mesure, au moyen d'un élément Latimer-Clark. Cette manière de procéder est certainement la plus sûre de toutes; mais, d'une part, elle nécessite l'usage constant d'un élément supposé invariable et, d'autre part, elle suppose que l'électromètre est réglé à une sensibilité assez grande pour que l'étalonnage puisse se faire sûrement au moyen d'un seul élément.

mais alors on ne peut modifier la sensibilité qu'en agissant sur le bifilaire, ce qui n'est pas possible dans l'appareil fixé comme il a été dit précédemment. De plus, avec cette disposition, qui, d'ailleurs, n'a été employée que dans le cas particulier où la différence de potentiel change de signe un grand nombre de fois par seconde, l'erreur absolue de potentiel correspondant à une erreur déterminée de lecture est proportionnelle à $\frac{1}{x}$, de sorte que l'erreur relative, proportionnelle à $\frac{1}{x^2}$, va en diminuant avec une extrême rapidité, ce qui peut être considéré comme un désavantage.

Dans la méthode ordinaire d'emploi de l'électromètre, l'erreur absolue est constante et l'erreur relative, proportionnelle à $\frac{1}{x}$, diminue plus lentement.

On a trouvé avantageux d'employer ici une méthode qui est une combinaison des deux précédentes en ce sens qu'elle conserve les piles de charge au moyen desquelles on pourra faire varier la sensibilité de l'appareil et qu'en même temps elle s'affranchit de leurs variations. Soit à déterminer la différence x de potentiel entre deux points dont l'un est supposé mis en communication avec le sol. On amène l'autre point à l'une des paires S de secteurs; à la seconde paire S' et à l'aiguille A aboutit l'un des pôles de la pile de charge de force électromotrice P dont l'autre pôle est relié au sol.

On a, pour exprimer dans ces conditions la déviation δ de l'aiguille, la relation

$$\text{(1)} \qquad \sin\delta = \alpha^2(P - x)^2.$$

Relions au sol les secteurs S, la déviation δ_0 devient

$$\text{(2)} \qquad \sin\delta_0 = \alpha^2 P^2.$$

Des relations (1) et (2) on déduit

$$\text{(3)} \qquad \sqrt{\sin\delta_0} - \sqrt{\sin\delta} = \alpha x.$$

La constante α de l'appareil se détermine en mettant en communication avec les secteurs S l'un des pôles d'une pile formée de n éléments Daniell, de force électromotrice e supposée connue. La relation (1) devient alors

$$\text{(4)} \qquad \sin\delta_n = \alpha^2(P - ne)^2,$$

et des relations (2) et (4) on déduit, pour la valeur de α,

$$(5) \qquad \alpha = \frac{\sqrt{\sin \delta_0} - \sqrt{\sin \delta_n}}{ne}.$$

On voit, par la relation (3), que, l'appareil une fois jaugé, l'expression de x est indépendante des variations de P, pourvu que cette force électromotrice de la pile de charge ne change pas dans l'intervalle des mesures de δ et δ_0. Si donc on fait une mesure croisée en déterminant successivement δ_0, δ, δ'_0, l'appareil indiquera de lui-même si la pile de charge a varié accidentellement. Si la différence entre δ_0 et δ'_0 est trop considérable, la mesure sera rejetée; sinon, on prendra pour valeur exacte la moyenne $\frac{\delta_0 + \delta'_0}{2}$. Le Tableau suivant de trois mesures consécutives dans une des déterminations de α montre l'utilité de cette correction. Dans ce Tableau, n_0, n'_0 représentent les divisions de l'échelle :

Ordre des mesures.	n_0.	n'_0.	$\frac{n_0 + n'_0}{2}$.
I.............	64,4	64,9	64,7
II.............	64,8	65,0	64,9
III.............	65,0	65,0	65,0
IV.............	65,0	65,8	65,4
V.............	65,9	65,7	65,8

On peut remarquer que l'erreur absolue de potentiel correspondant à une erreur donnée de lecture est proportionnelle à $\frac{1}{P - x}$; par suite, l'erreur relative est proportionnelle à $\frac{1}{x(P - x)}$, c'est-à-dire qu'elle va d'abord en diminuant jusqu'à la valeur $x = \frac{P}{2}$, où elle est minimum, pour croître ensuite; de telle sorte que, pour des valeurs de x équidistantes de $\frac{P}{2}$, l'erreur relative est la même. Elle reste donc sensiblement constante pendant assez longtemps, en admettant toutefois, comme on l'a fait jusqu'ici, que x et P soient de même signe.

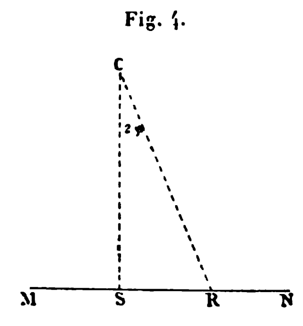
L'inconvénient de cette méthode est que l'action du potentiel x se produit sur un système déjà dévié, comme si le zéro d'action était à la distance δ_0 de la position d'équilibre. De là, deux causes d'erreur possibles relatives, l'une à la torsion du bifilaire, l'autre à la position dissymétrique de l'aiguille par rapport aux quadrants, au moment de l'action. Cette dernière n'est

qu'apparente, car on peut tordre préalablement le bifilaire de façon que la déviation δ_0 due à la pile de charge ramène précisément l'aiguille dans le plan de symétrie de l'appareil. Quant à la première, on ne peut l'éviter; mais on l'atténue d'abord en rendant, comme on l'a dit, x et P de même signe, de façon à avoir $\delta < \delta_0$ et ensuite en employant la formule complète,

$$\sin\delta = \alpha^2(P - x)^2.$$

Dans cette formule, et pour des valeurs de δ aussi considérables que celles qui se rencontreront forcément avec cette méthode, on ne peut plus songer à exprimer proportionnellement $\sin\delta$ par le déplacement de l'image sur l'échelle. On a donc dû construire une Table qui donne les valeurs de $\sin\delta$ ou plutôt de $\sqrt{\sin\delta}$ correspondant aux différentes positions de cette image. Soit C (*fig.* 4) la projection de l'axe de suspension de l'aiguille sur un plan

Fig. 4.



perpendiculaire à sa direction et passant par l'échelle MN et S la position de l'image du fil sur l'échelle lorsque l'aiguille est symétriquement placée par rapport aux quadrants. Nous supposerons qu'alors l'image est dans le plan vertical contenant le fil et que la direction MN est perpendiculaire à CS. Soit R la position de l'image du fil dans l'état de repos de l'appareil. Si l'on désigne par φ l'angle de torsion qui amène l'image de R en S, on a

$$\tan 2\varphi = \frac{RS}{CS};$$

et, lorsque l'image occupe une position P à droite ou à gauche de S, le nouvel angle φ' dont l'aiguille est déviée sera donné par la relation

$$\tan 2\varphi' = \frac{PS}{CS}.$$

Donc l'angle δ de déviation correspondant à la position P de l'image a

pour expression

$$\delta = \varphi \pm \varphi'.$$

La position R est donnée à l'avance de façon que, sous l'action de la pile de charge seule, l'image vienne se fixer dans le voisinage et à gauche de S : φ est donc immédiatement connu et il ne reste plus qu'à attribuer à P différentes positions correspondant aux différentes divisions N de l'échelle pour calculer les valeurs de φ' et, par suite, les valeurs de δ ou de $\sqrt{\sin\delta}$ au moyen desquelles on formera une Table.

Une dernière opération consiste à étalonner, une fois pour toutes, l'appareil et surtout à vérifier si le rapport $\frac{\sqrt{\sin\delta_0} - \sqrt{\sin\delta}}{n}$ est indépendant du nombre n de daniells employés, comme cela doit être si, dans ses déplacements, l'aiguille ne change pas sensiblement de position par rapport aux secteurs. M. Mouton, dans ses expériences sur l'induction, a vérifié que, dans son électromètre dont la boîte était de grandes dimensions, la proportionnalité du moment de torsion à la différence de potentiel se maintenait jusqu'à 1°30′ seulement de la position de symétrie. Avec l'électromètre à un seul plan de secteurs, MM. Angot et Branly ont trouvé la proportionnalité jusqu'à 3° environ. Enfin, avec un appareil formé d'une boîte de petites dimensions, M. Benoît (1) l'a vérifiée jusqu'à près de 10°, ainsi que le montre le Tableau suivant :

Angle α.	$\frac{V(V_1 - V_2)}{\sin\alpha}$.
1°.33′,2	885
3. 6,7	885
4.41,3	880
6.15,5	881
7.49,0	882
9.20,0	888

Il était donc probable que, avec l'appareil employé ici et la possibilité où l'on était d'opérer de part et d'autre de la ligne de symétrie et à une distance angulaire maximum de 2° de cette ligne, la constance du rapport se maintiendrait. Cette vérification a néanmoins été faite et l'on a déterminé la constante α de l'appareil par cinq expériences effectuées avec trois valeurs de n telles que la déviation fût principalement d'un seul côté de la ligne de symétrie :

---

(1) Benoît, *Sur l'électromètre à quadrants* (*Journal de Phys.*, 1re série, t. VI, p. 212).

12 Février 1885.

Pile de charge de 40 éléments. — Zéro de repos à 420. — Ligne de symétrie à 150.

n.	$\frac{N_1+N_1'}{2}$.	$\sqrt{\sin\delta_0}$	N.	$\sqrt{\sin\delta}$.	$\frac{\sqrt{\sin\delta_0}-\sqrt{\sin\delta}}{n}$.
10	64,7	0,4267	202,1	0,3329	0,00938
	64,9	4266	202,3	3328	
5	65,0	4266	137,7	3799	0,00934
	65,4	4263	138,0	3796	
7	65,8	4261	165,0	3608	0,00933
			Moyenne	....	0,00935

La constance du rapport est donc suffisamment vérifiée. Le nombre 0,00935 représente la valeur de α correspondante à 1^{dll}, c'est-à-dire la valeur de $\sqrt{\sin\delta}$ qu'on obtiendrait par la méthode de M. Joubert avec un élément daniell sur l'une des paires de secteurs et l'aiguille. Si l'on veut exprimer les potentiels en volts, on remplacera α par l'expression $\frac{0,00935}{e}$ dans la formule générale, e étant la valeur du daniell en volts :

$$x = \frac{e}{0,00935}(\sqrt{\sin\delta_0} - \sqrt{\sin\delta}).$$

Dans les mesures relatives, on prendra pour valeur de x l'expression

$$\sqrt{\sin\delta_0} - \sqrt{\sin\delta}.$$

Mesure de l'intensité du courant.

La mesure de l'intensité du courant qui traverse la lampe à incandescence se faisait au moyen d'un excellent galvanomètre de Weber, muni d'un shunt au $\frac{1}{100}$ environ et mis en dérivation sur le courant principal. Les déviations du barreau étaient lues par réflexion au moyen d'une lunette sur une échelle divisée, placée à une distance de 2^{m} environ de l'appareil. La proportionnalité des intensités aux déviations lues sur l'échelle a été vérifiée par les expériences suivantes qui ont servi en même temps à graduer l'appareil en unités absolues. On a fait passer dans l'appareil, muni du shunt, le courant d'éléments sensiblement constants et noté la déviation correspondante. En même temps le courant traverse un voltamètre à sulfate de cuivre et l'on estimait le poids de cuivre déposé pendant le temps de passage

du courant. On en déduisait la valeur i en ampères du courant capable de produire une déviation de 1^{div} de l'échelle. En répétant cette expérience pour deux valeurs différentes et assez grandes de l'intensité, on devait, si la proportionnalité se vérifie jusqu'à ces limites, trouver le même nombre pour exprimer ce courant correspondant à 1^{div}. On a préféré, d'après les conseils de M. Crova, le sulfate de cuivre aux sels d'argent, malgré l'inégale variation de poids des deux lames, positive et négative, pendant l'électrolyse du cuivre, signalée par M. Mascart ([1]); d'abord parce que cette différence est assez faible et qu'il suffit, pour éviter toute erreur, de prendre la variation de poids de la lame négative; en outre, parce que l'argent, pour de faibles densités du courant, a l'inconvénient de se déposer sur la cathode en aiguilles cristallines qui se détachent avec la plus grande facilité. Le cuivre, au contraire, est remarquable par la beauté de son dépôt galvanoplastique.

Le courant employé pour l'électrolyse n'est généralement pas constant pendant la durée assez longue d'une expérience. On peut essayer de maintenir l'image immobile au moyen d'un rhéostat intercalé dans le circuit; mais, outre que cette opération est toujours fort délicate, elle est le plus souvent illusoire à cause des variations de zéro que subissent d'une façon continue les galvanomètres. Il est donc préférable de noter, de temps en temps, le zéro et la position et de prendre pour déviation, pendant l'intervalle de deux observations, la moyenne des déviations ainsi observées. En multipliant ce nombre par le temps exprimé en secondes et faisant la somme Σ des produits analogues pour tous les intervalles, on aura la formule suivante, où x représente la valeur en ampères du courant qui déplace le fil de 1^{div},

$$x \times 0,3285 \times \Sigma = p,$$

p étant le poids de cuivre déposé exprimé en milligrammes.

Le nombre 0,3285 qui représente, pour le cuivre, l'action chimique d'un ampère par seconde ou d'un coulomb, a été déduit du nombre 1,1156 donné, pour l'argent, par M. Mascart ([2]), en prenant pour équivalents respectifs de ces deux métaux :

Ag..........	107,93
Cu..........	31,78

([1]) Mascart, *Journal de Physique*, 1re série, t. I, p. 112.
([2]) *Ibid.*, 2e série, t. III, p. 286.

Le Tableau suivant résume les résultats d'une expérience où le courant était fourni par un accumulateur du genre Planté :

2 Janvier 1885.

Durée de passage en minutes : θ.	Déviation moyenne en divisions : n.	Produit $\theta \times n$.
15	134,3	2014,5
20	135,6	2712,0
20	136,4	2728,0
20	137,9	2758,0
20	143,0	2860,0
30	144,0	4320,0
		17392,5

d'où

$$\Sigma = 17392,5 \times 60 = 1043550.$$

Variation de poids de la lame négative :

$$p = 35^{\text{mg}},9.$$

On en déduit

$$x = \frac{35,9}{1043550 \times 0,3285} = 0^{\text{amp}},0001047.$$

La même expérience, faite une année auparavant (10 décembre 1883), avec un élément Daniell en place de l'accumulateur, avait donné les résultats suivants :

Déviation moyenne.	Σ.	p.
165	782380	26,9

d'où

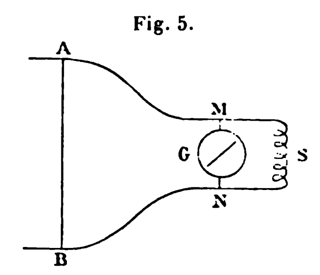
$$x = \frac{26,9}{782380 \times 0,3285} = 0^{\text{amp}},0001046.$$

La concordance absolue de ces deux nombres montre, d'abord, que la valeur en ampères d'une division est indépendante de la déviation moyenne qui a servi à la déterminer et que, par suite, les intensités sont proportionnelles aux déviations. Elle montre, en outre, que l'appareil est resté identique à lui-même pendant toute la durée des expériences.

Pour déduire de ce nombre la connaissance, en valeur absolue, de l'intensité du courant qui traverse la lampe, il était nécessaire de déterminer les éléments de la dérivation. Le courant principal, après avoir traversé la lampe, arrive aux deux extrémités AB (*fig.* 5) d'un fil de cuivre de 1^{m} de

longueur et de 1^{mm} de diamètre environ. Des points A et B partent les fils de cuivre qui vont au galvanomètre G muni du shunt précédent, également

Fig. 5.



en cuivre, et dont la valeur est approximativement $\frac{1}{100}$, en désignant ainsi le rapport $v = \frac{i'}{i}$ des déviations du galvanomètre shunté et seul, sous l'action du même courant extérieur.

Soient

g la résistance du galvanomètre;
s la résistance du shunt;
ρ la résistance du galvanomètre muni du shunt.

On a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{g} + \frac{1}{s} = \frac{1}{g}\left(1 + \frac{g}{s}\right) = \frac{1}{g}\left(1 + \frac{i - i'}{i'}\right) = \frac{1}{g} \times \frac{i}{i'} = \frac{1}{v \times g},$$

en supposant, toutefois, que l'intensité extérieure du courant n'a pas été modifiée d'une façon appréciable par l'introduction du shunt dans le circuit, condition qu'il est toujours possible de réaliser par l'emploi d'une résistance additionnelle considérable sur le trajet du courant.

On tire de là

$$\rho = v . g.$$

On peut donc déterminer la résistance ρ en fonction de g par deux mesures d'intensités relatives. Mais il est clair que cette détermination, faite directement avec le shunt au $\frac{1}{100}$, serait peu exacte : on a donc pris un shunt intermédiaire dont la valeur servira de terme de comparaison pour le galvanomètre et le shunt au $\frac{1}{100}$.

1° Shunt auxiliaire. Résistance additionnelle : 9800^{ω}.

	Déviations (doubles).	
Galvanometre seul.......	399,40	$v_1 = 0,1127$
» shunté.....	45,05	

2° Shunt au $\frac{1}{100}$ par rapport au précédent. Résistance additionnelle : 4800$^\omega$.

	Déviations (doubles).	
Shunt auxiliaire..........	399,05	$v_2 = 0,09748$
» au $\frac{1}{100}$............	38,90	

Par suite, la valeur v du shunt au $\frac{1}{100}$ est

$$v = v_1 \times v_2 = 0,01098,$$

et enfin, la résistance ρ du galvanomètre muni de ce shunt est

$$\rho = 0,01098 g.$$

La résistance g du galvanomètre, qu'il est d'ailleurs inutile de connaître, est d'environ 7^ω.

La résistance d du fil AB a été déterminée d'une façon analogue en le mettant en dérivation sur le galvanomètre comparativement avec le shunt précédent. Soient I l'intensité du courant extérieur, i_1, i_2 les intensités dans le galvanomètre muni successivement du shunt au $\frac{1}{100}$ et du fil AB; on a

$$i_1 g = (I - i_1) s,$$
$$i_2 g = (I - i_2) d;$$

on en déduit

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{\frac{g}{s} + 1}{\frac{g}{d} + 1} = \frac{1}{v\left(\frac{g}{d} + 1\right)} = v',$$

$$d = \frac{vv'}{1 - vv'} g;$$

on a trouvé précédemment

$$v = 0,01098 g.$$

Quant à v', l'expérience le détermine de la même manière :

Résistance additionnelle : 1000$^\omega$.

	Déviations (doubles).	
Shunt au $\frac{1}{100}$............	180	$v' = 0,13277$
Fil AB..................	23,9	

Il en résulte pour la résistance du fil AB

$$d = 0,001459 g.$$

Enfin, les fils de communication AM + NB ont été soudés sur le fil AB exactement aux points A et B où se faisaient les prises dans l'expérience précédente. On obtenait ainsi un seul conducteur MABN avec lequel on pouvait faire dérivation sur le galvanomètre. On trouve ainsi

Résistance additionnelle : 9800^{ω}.

	Déviations (doubles).	
Galvanomètre seul........	397,2	$v'' = 0,1161$
» shunté......	46,1	

La résistance totale est

$$f + d = \frac{v''}{1 - v''} g = 0,1313 g,$$

d'où

$$f = (0,1313 - 0,001459) g = 0,12984 g.$$

Il est inutile d'ajouter que les nombres donnés pour les déviations sont les moyennes d'au moins quatre expériences, toujours concordantes. Avec les données précédentes, on peut exprimer en ampères l'intensité du courant dans la lampe en fonction de la déviation N du galvanomètre. La formule qui donne cette intensité est la suivante :

$$I = 0,00010465 \frac{\rho + f + d}{d} N = 0^{\text{amp}},0102 N.$$

En résumé, l'énergie dépensée dans la lampe en une seconde aura pour expression :

1° Avec l'électromètre capillaire,

$$e \times (D + \varepsilon) \times 0,0102 N \times 10 \text{ mégergs},$$

D étant le nombre de daniells mis en opposition et ε la force électromotrice additionnelle, positive ou négative, qui ramènerait le ménisque au fil;

2° Avec l'électromètre Thomson,

$$\frac{e}{0,00935} (\sqrt{\sin \delta_0} - \sqrt{\sin \delta}) 0,0102 N \times 10 \text{ mégergs}.$$

Le daniell employé dans ces mesures était ainsi constitué :

Sulfate de cuivre saturé à 15°,
Sulfate de zinc à 30 pour 100;
Cuivre;
Zinc amalgamé.

On a pris pour valeur de sa force électromotrice $1^{\text{volt}},12$ et, pour s'assurer de l'exactitude de ce nombre, aussi bien que de celle de la graduation du galvanomètre en unités absolues, opération toujours fort délicate, on a profité de l'installation du calorimètre de M. Berthelot, à propos de la vérification de la loi de Joule, pour comparer l'énergie dépensée dans la lampe et mesurée avec les données précédentes à la quantité de chaleur fournie directement par cette lampe au calorimètre qui la contenait.

Le Tableau suivant reproduit une expérience faite avec de l'eau distillée qu'on avait laissée le moins possible au contact des vases de verre et qui était suffisamment isolante pour ne permettre aucune trace d'électrolyse entre les fils de la lampe :

19 Janvier 1884.

	Temps.	Température du calorimètre.		Galvanomètre.	Électromètre capillaire (D = 3, $\varepsilon < 0$).
	h m s 10.36. 0	° ′ 11.62	correction : 0	»	
Départ...	40	11.62		228,5	0
	45	94		137,0	mm 28,4
	50	12.28		136,3	29,6
Arrêt....	53.10	53		136,0	30,0
	55	54	correction : 0	227,1	0
	57	54		»	»
	11. 0	54		»	»

Poids en eau du calorimètre..... $604^{\text{gr}},388$.

On déduit de cette expérience les résultats suivants :

Durée du passage........................	790^{s}
Élévation de température................	$0°,92$
Déviation moyenne du galvanomètre......	91,4
Différence de potentiel aux bornes........	$(3-0,225)\times 1,12$

Adoptant pour équivalent mécanique de la chaleur le nombre 428 et rapportant les résultats à ce qu'ils seraient pour 10^{m} de passage, on obtient

Énergie dépensée (exprimée en calories)........	$\frac{600}{42}\times 2,775\times 1,12\times 0,0102\times 91,4$	$= 414^{\text{cal}}$
Quantité de chaleur dégagée dans le calorimètre..	$\frac{600}{790}\times 0,92\times 604,388$	$= 417$

La concordance de ces nombres est absolument satisfaisante si l'on remarque que la lecture du thermomètre n'a été faite qu'à $\frac{1}{100}$ de degré près et qu'une erreur de cet ordre entraînerait une variation de plus de 4 unités

dans le nombre qui exprime la quantité de chaleur dégagée au sein du calorimètre.

Donc, en désignant par d la différence de potentiel en daniells et par N la lecture au galvanomètre, l'énergie dépensée dans la lampe sera donnée, en unités volt-ampère, par l'expression

$$1,12 \times 0,0102 \times N \times d = 0,011424 \times N \times d;$$

il suffit de multiplier ce nombre par 10^7 pour passer ainsi aux unités absolues.

III. — Déterminations photométriques.

Source de comparaison.

La méthode photométrique employée dans ces recherches consistait dans la comparaison des intensités d'une même radiation prise dans le spectre de la lampe à incandescence et dans le spectre d'une source auxiliaire. Le choix de cette dernière est presque indifférent lorsqu'il ne s'agit que de déterminer la relation qui lie l'intensité d'un rayonnement simple à l'énergie électrique dépensée dans la lampe : il est clair, en effet, qu'il suffit que la source considérée contienne cette radiation avec une intensité qui permette la comparaison dans l'appareil de mesure employé. Néanmoins, on conçoit que cette source auxiliaire devra satisfaire à une condition essentielle : c'est d'être constante pendant toute la série des mesures, ou, si cette constance est légèrement altérée au cours d'une détermination, de permettre d'effectuer les corrections au moyen desquelles on se trouvera affranchi des variations précédentes d'intensité.

On peut admettre qu'une lampe à incandescence à filament de charbon, comme celle de M. Abney, ou à lame de platine, comme l'étalon proposé par M. Schwendler (1), lorsqu'elle est traversée par un courant d'intensité constante, sera capable de constituer une source de comparaison absolument fixe, du moins pendant la durée d'une expérience ; mais, quel que soit le générateur d'électricité employé, même avec des accumulateurs saturés, la fixité d'un courant est presque impossible à obtenir en toute rigueur pendant plusieurs heures, et l'on verra plus tard que, dans ces lampes fonction-

(1) Schwendler, *On a new standard of light* (*Philos. Magaz.*, t. VIII, p. 392).

nant en régime normal, la moindre variation d'intensité du courant entraîne une variation considérable dans l'intensité du rayonnement lumineux. De plus, les corrections qu'il conviendrait d'apporter aux résultats par le fait de ces variations nous sont inconnues, puisque nous ignorons, jusqu'à présent, la relation qui existe, pour une lampe donnée, entre l'intensité d'une radiation et l'intensité du courant.

Enfin, et c'est là un inconvénient très grave lorsqu'il s'agit de déterminer la *nature* de la source à étudier par rapport à celle de la source auxiliaire, l'intensité lumineuse totale de cette dernière n'est, dans aucun de ses états, proportionnelle à l'intensité particulière à chaque radiation, c'est-à-dire que les variations d'énergie dépensée dans la lampe entraînent, en même temps qu'une variation inconnue dans chaque rayonnement simple, une modification également inconnue dans la nature du rayonnement total. L'étalon de lumière présenté par M. Violle au Congrès des électriciens et adopté par la Conférence internationale des unités électriques réalise absolument les conditions théoriques d'une source type, en ce sens que, étant déterminé par une surface incandescente dont la température est nettement définie par un phénomène physique intimement lié à cette température, la nature de ce rayonnement ainsi que sa valeur intrinsèque sont absolument définies. Néanmoins on doit reconnaître que, pour les mesures courantes, cet étalon n'a pas encore été réalisé dans une forme qui permette de l'employer sans difficulté.

En dehors de la lampe à gaz de M. Wernon-Harcourt dont l'usage ne s'est pas encore assez répandu pour qu'il soit possible de l'apprécier, le type le plus commun est la bougie. Cette source donne une lumière de composition presque identique ; mais son intensité varie considérablement avec le pays de production et, qui plus est, avec les différents produits d'une même fabrication. C'est ainsi que, suivant M. F. Le Blanc, et d'après les expériences d'une commission anglaise dont faisait partie M. Williamson, des *candles* de blanc de baleine, provenant d'une même fabrique anglaise, présentaient entre elles des écarts de 14 à 15 pour 100. Les bougies françaises sont sujettes à des variations analogues. Enfin la bougie, quelles que soient sa composition et son origine, est sujette à modifier sa combustion sous l'action des causes les plus légères en apparence, tirage, courant d'air, etc., et, par suite, l'intensité de sa lumière peut varier de quantités notables dans un temps très court. C'est ainsi que M. Schwendler, dans ses mesures photométriques relatives à l'étalon (P.L.S), a constaté des variations du simple au double

dans l'intensité lumineuse d'une même bougie, selon que l'air arrive plus ou moins librement sur la flamme.

En France, l'usage de la lampe Carcel, comme type de source lumineuse, a prévalu jusqu'à présent et il faut reconnaître que si, au point de vue d'une définition théorique rigoureuse, elle est inférieure au type de M. Violle, elle offre, pour les déterminations courantes, des avantages auxquels on serait loin de s'attendre tout d'abord et qu'une pratique de quelque temps met pleinement en évidence. D'ailleurs, des expériences comparatives de M. Violle [1] ont justifié cette préférence en montrant que la valeur lumineuse de la lampe Carcel, rapportée à l'étalon absolu, est parfaitement définie par les conditions indiquées pour son fonctionnement. C'est ainsi que sept séries de mesures effectuées avec une première lampe Carcel ont donné, comme moyenne de nombres très concordants, pour valeur de cette source par rapport à l'étalon de platine, le nombre $\frac{1}{2.08}$, et qu'une autre lampe Carcel a donné, par dix-huit déterminations également concordantes, quoique effectuées par l'intermédiaire d'une source auxiliaire, le nombre, très voisin du précédent, $\frac{1}{2,07}$. Donc, au point de vue de l'intensité absolue de la source lumineuse, on peut, en toute sécurité, s'adresser à la lampe Carcel fonctionnant avec les précautions prescrites. Il suffira ensuite de multiplier les intensités obtenues par le facteur $\frac{1}{2,08}$ pour passer ainsi et sans difficulté aux unités adoptées. Ces conditions, qu'il est bon de rappeler ici, parce qu'il importe de ne pas s'en écarter, sont résumées dans la description suivante du carcel donnée par MM. Dumas et Regnault [2] :

	mm
Diamètre extérieur du bec....................	23,5
» intérieur (courant d'air)............	17,0
» du courant d'air extérieur...........	45,5
Hauteur totale du verre......................	290,0
Distance du coude à la base du verre.........	61,0
Diamètre extérieur au niveau du coude........	47,0
» au haut de la cheminée.....	34,0
Épaisseur moyenne du verre...................	2,0

La mèche doit être du type de la mèche moyenne, dite des *phares*. Elle doit être formée d'une tresse de soixante-quinze brins et peser $3^{gr},06$ par décimètre. Ces mèches doivent être conservées avec soin à l'abri de l'humidité ; il suffit pour cela de les placer dans un vase de verre à double fond,

(1) VIOLLE, *Séances de la Société de Physique*, année 1884, p. 141.
(2) DUMAS et REGNAULT, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LXV, p. 489.

à la partie inférieure duquel on a disposé des fragments de chaux vive, tandis que le fond supérieur, percé de trous, supporte les mèches soigneusement enveloppées. Enfin le couvercle, rodé à l'émeri, est appliqué au moyen d'un peu de graisse qui s'oppose à toute introduction d'humidité extérieure. L'huile employée doit être de l'huile de colza épurée.

Dans les recherches qui vont suivre, on s'est conformé scrupuleusement à ces instructions : les mèches et l'huile employées étaient fournies directement par M. Deleuil et mises à l'abri de toute cause d'altération.

A ces conditions d'établissement de la lampe viennent s'ajouter les conditions de régime, qui sont de beaucoup les plus importantes. S'il est vrai, en effet, que, avec un combustible bien défini comme celui que nous employons, la quantité de charbon mise en liberté dans la flamme et rendue incandescente est proportionnelle à la dépense, il faut reconnaître cependant que cette quantité de charbon et, par suite, l'intensité de la flamme, sont variables avec la hauteur de la mèche, la position du verre par rapport à celle-ci, en un mot avec la manière dont la combustion se produit.

C'est pour définir ces conditions de dépense et de combustion que Dumas et Regnault recommandent d'élever la mèche à une hauteur de 10^{mm} et le verre de telle sorte que le coude soit à 7^{mm} au-dessus du niveau de la mèche. Dans cet état, et lorsqu'elle a pris son allure régulière, la lampe doit brûler environ 42^{gr} d'huile à l'heure avec une flamme de 35^{mm} de hauteur. En réalité, ce régime régulier n'est atteint que plus d'une demi-heure après l'allumage et lorsque les différentes parties qui entourent la mèche ont pris leur température stationnaire ; mais alors il se conserve pendant près de deux heures presque sans variations et, en tous cas, sans ces variations brusques des autres sources usuelles, qui sont si préjudiciables aux expériences.

On aura l'occasion de s'assurer de cette constance de la lampe Carcel en régime normal par les Tableaux qui suivront ; mais il importe, dès à présent, de faire une remarque à ce sujet. Dans toute expérience de photométrie, on s'efforce, et c'est là en effet un point essentiel, de se placer dans les conditions les plus complètes d'obscurité : l'œil, dans ces circonstances, prend, à n'en pas douter, une acuité que le moindre filet de lumière lui enlève en grande partie. Pour cela, on dissimule le plus possible les sources de lumière employées dans les déterminations et l'on est tenté de les entourer d'écrans qui ne laissent d'ouverture libre que pour les produits de la combustion. Ces dispositions peuvent avoir la plus fâcheuse influence sur le régime de ces sources et en particulier de la lampe Carcel. C'est ainsi qu'au

cours des expériences actuelles on avait entouré cette lampe d'un globe métallique en laiton noirci qui s'appuyait sur le rebord de la galerie et présentait deux ouvertures, l'une libre, pour l'observation, l'autre se prolongeant par une cheminée également métallique qui emprisonnait le verre jusqu'à son extrémité.

On avait ainsi isolé la source; mais il ne fut pas difficile de constater que, par suite de l'échauffement énorme qui résultait, pour la mèche, de cet emprisonnement de la flamme, la dépense s'accélérait dans une proportion considérable et que, de plus, la combustion se modifiait de telle sorte que la mèche ne tardait pas à se carboniser sur toute sa longueur. C'est ce qui résulte de l'expérience suivante, faite environ deux heures après l'allumage :

Marche de la lampe			
avec globe.		sans globe.	
Temps.	Différence.	Temps.	Différence.
12h41m25s	6m37s		
47.58			
»	6.42	12h57m11s	7m0s
»		1. 4.11	
1. 7.54	6.47	»	7.4
14.41		»	
»		22.14	7.8
»		29.22	

Il faut donc, pour se préserver de la lumière inutile de la source, ou bien élargir le cadre des écrans protecteurs, ou bien, si cela est possible, disposer la lampe dans une chambre contiguë à la salle d'expériences et dont le mur de séparation sera percé d'une ouverture pour l'observation, et l'y laisser brûler en liberté.

La lampe Carcel normale est définie par une dépense de 42gr d'huile à l'heure : c'est dans ce régime qu'elle vaut $\frac{1}{2,08}$ de l'étalon absolu. Or on conçoit que, quelque soin que l'on mette à repérer exactement le verre sur la monture et la mèche sur le verre, au moyen de traits gravés sur ce dernier, il sera impossible de régler exactement la dépense à ce point. Mais les expériences d'Audouin et Bérard ont montré que l'intensité lumineuse de la flamme était, de part et d'autre de ce régime normal, proportionnelle au poids du combustible brûlé dans l'unité de temps, pourvu toutefois que la dépense ne soit pas inférieure à 38gr ni supérieure à 46gr. C'est là un avantage considérable de cette source que, même dans ses variations, elle restera

comparable à elle-même et pourra toujours être exprimée en fonction de sa valeur normale, puisqu'il suffira de déterminer, à chaque instant, sa dépense, pour connaître son intensité. Cette estimation de la dépense se fait au moyen de la balance photométrique de M. Deleuil, dont l'un des plateaux est disposé pour recevoir la lampe, tandis que l'autre contient une tare. Lorsque, par le fait de la dépense, la lampe se soulève, le fléau, en s'inclinant, fait basculer un petit marteau qui vient frapper sur un timbre. On note l'heure sur un chronomètre à secondes et l'on place un poids déterminé (5^{gr} ou 10^{gr}) du côté de la lampe. Le fléau revient s'appuyer sur ses arrêts, on relève le marteau et lorsqu'au bout de quelque temps un poids d'huile égal au poids ajouté a été brûlé, le fléau s'incline de nouveau; le marteau frappe et l'observateur, prévenu du reste de l'époque des déclenchements successifs par la régularité même avec laquelle ils se succèdent, note l'heure de nouveau. Le Tableau suivant, emprunté à une expérience photométrique, donne une idée de la marche de la lampe :

8 Avril 1884.

Lampe allumée à $5^h 35^m$. — Poids de 5^{gr}.

Heure.	Différence en secondes.
h m s 5.56.58	
	437
6. 4.15	
	432
11.27	
	424
18.31	
	422
25.33	
	419
32.32	
	418
39.30	
	412
46.22 (?)	
	414
53.16	
	416

Heure.	Différence en secondes.
	416
h m s 7. 0.12	
	414
7. 6	
	415
14. 1	
	416
20.57	
	416
27.53	
	418
34.51	
	420
41.51	
	418
48.49	
	418
55.47	
	418
8. 3.45	

On voit que, dans cette expérience, qui a été prise au hasard et ne peut compter parmi les plus régulières, la dépense n'a commencé à devenir constante qu'environ une heure après l'allumage, mais elle est restée alors sensiblement constante pendant une heure et demie, et probablement elle se serait maintenue plus longtemps si l'on n'avait pas mis fin à l'expérience. Quoi qu'il en soit, et même pour les variations continues subies par la lampe dans la première heure, on serait encore en droit d'appliquer la loi de proportionnalité de l'intensité lumineuse à la dépense, puisque tous ces nombres se

trouvent compris entre les nombres extrêmes 390^s et 473^s, en dehors desquels l'application de cette loi n'est plus permise. Mais dans bien des cas la marche est plus régulière et le Tableau suivant en fournit un exemple :

3 Avril 1885.

Lampe allumée à 12^h 35^m.

Heure.	Différence en secondes.		Heure.	Différence en secondes.
h m s			h m s	
12.57. 9			2. 0.54	
	428			424
1. 4.17			7.58	
	426			424
11.23			15. 2	
	426			425
18.29			22. 7	
	426			424
25.35			29.11	
	423			424
32.38			36.15	
	424	moy.		
»				
	424	moy.		
»				
	424	moy.		
53.50				
	424			

Ici encore on voit que ce n'est guère que trois quarts d'heure après l'allumage que la lampe prend son véritable régime normal; mais alors elle marche avec une régularité parfaite pendant plus d'une heure qu'a duré l'expérience, et les nombres qui précèdent sont une garantie à la fois de l'excellence de la source lumineuse et de la fidélité des déclenchements de la balance, même sous une charge aussi considérable que celle de la lampe et des poids qui lui font équilibre : il est donc légitime d'appliquer, dans ces conditions, la loi de proportionnalité indiquée précédemment.

Enfin, en nous plaçant à un point de vue différent, la lampe Carcel présente ce nouvel avantage que, même dans ses variations, elle reste comparable à elle-même sous le rapport de la composition de sa lumière, et nous aurons plus tard à invoquer cette propriété lorsqu'il s'agira de fixer la composition spectrale de la lumière émise par nos lampes à incandescence.

Voici par quelles considérations M. Crova rend compte de cette fixité dans la composition de la lumière Carcel et, en général, des sources à charbon incandescent au sein d'une flamme (¹) : « Un combustible défini, tel que l'huile de colza, développe une quantité de chaleur proportionnelle au poids de combustible brûlé et, comme cette chaleur est employée à élever la

(¹) Crova, *Étude des radiations* (*Ann. de Chimie et de Phys.*, 3e série, t. XIX, p. 167).

température du carbone qui se sépare à l'état solide au sein de la flamme et celle des produits de la combustion, la température du carbone ainsi isolé sera constante, quelle que soit la masse de la flamme, lorsque cette masse variera entre des limites assez étendues. La composition de la lumière émise sera donc constante, quoique son intensité puisse varier beaucoup. Ce que nous venons de dire suppose que la combustion est complète et qu'elle se fait toujours dans les mêmes conditions, c'est-à-dire avec dépôt de carbone solide au sein d'une masse gazeuse incandescente, de composition constante. Il faudra donc éliminer les cas où la flamme serait assez petite pour commencer à brûler bleu, et assez grande pour que la combustion soit incomplète et qu'il y ait dépôt de carbone non brûlé. Dans ce dernier cas, la flamme devient fumeuse et sa couleur rougeâtre accuse un abaissement de température. » M. Crova a, d'ailleurs, vérifié directement le fait précédent, soit avec deux lampes de même grosseur et donnant des lumières d'intensités très différentes, soit avec des lampes de dimensions différentes et donnant des flammes de hauteur très variable. Ainsi donc, on arrive à cette conclusion que « la composition de la lumière donnée par la lampe Carcel est, en général, indépendante de son intensité et ne peut être altérée que dans deux cas extrêmes dont il est toujours facile de s'éloigner, celui où elle tend à brûler bleu et celui où elle devient fumeuse ».

Méthodes photométriques. — Nous prendrons donc, comme source auxiliaire, la lampe Carcel ainsi définie avec ses conditions de constance et de comparabilité, et nous déterminerons, pour chaque état de la lampe à incandescence, l'intensité lumineuse de ses radiations par rapport à celles de la lampe Carcel.

Les méthodes photométriques susceptibles d'être employées à cette détermination se rattachent presque exclusivement à trois catégories :

1° Dans la première, on compare les éclairements produits par les deux sources sur deux surfaces voisines et l'on atténue l'un de ces éclairements de façon à le rendre, autant que possible, égal à l'autre. Des conditions mêmes de l'expérience on déduit le pouvoir éclairant total de l'une des sources par rapport à l'autre : c'est le principe des photomètres de Bouguer, Rumford, Foucault, etc. Si les deux sources ont un éclat trop fort et capable de fatiguer l'œil, on les atténue dans des proportions connues; mais alors la méthode suppose que les lumières sont de même teinte, car on sait que la notion de teinte qui disparaît à mesure que l'éclat augmente se manifeste, au contraire, lorsqu'on atténue suffisamment l'éclairement produit

par les sources sur deux plages voisines ([1]). Il est à remarquer, cependant, avec Aubert ([2]), que cette notion de couleur qui s'accentue à mesure que l'intensité diminue tend, par contre, à s'effacer lorsque la grandeur des plages, sur lesquelles l'œil effectue la comparaison, diminue de plus en plus. Ce fait intéressant a donné naissance aux expériences de Helmholtz, Macé de Lépinay et Nicati sur la détermination de l'intensité relative des rayons diversement colorés.

Comme se rattachant encore à cette catégorie, on peut citer l'appareil très élégant décrit par M. Cornu ([3]) sous le nom de *microphotomètre*, et qui permet en effet de prendre dans les deux sources deux régions très petites que l'on amène à se juxtaposer devant l'œil et dont on peut ainsi déterminer les éclats intrinsèques relatifs.

Dans les méthodes que nous venons de rappeler, on modifie l'éclairement produit par les sources soit en les éloignant plus ou moins de l'écran, et calculant cet éclairement par la loi, qui paraît absolument rigoureuse, du carré des distances, soit en obturant, dans des proportions connues, les faisceaux qu'elles envoient sur les plages à comparer.

Arago, le premier, après avoir vérifié la loi de Malus, en fit usage, dans les déterminations photométriques, pour éteindre, dans un rapport donné, l'éclat des sources à étudier. Parmi toutes les dispositions, d'ailleurs nombreuses, qui ont été mises en œuvre depuis Arago, il suffira de rappeler celle que M. Becquerel a adoptée dans des recherches analogues à celles-ci, et dont il a été déjà question. Imaginons une lunette ordinaire, formée d'un objectif A et d'un oculaire O ; sur le milieu de la longueur vient s'adapter un second tube, perpendiculaire au premier et muni également d'un objectif B. Les deux sources à comparer sont placées respectivement devant les objectifs A et B et, au moyen d'un prisme à réflexion totale placé à la rencontre des axes optiques, on peut juxtaposer dans le plan focal de l'oculaire les images réelles de ces deux sources. Chaque tube porte deux nicols dont l'un est mobile. Du côté de B, où se trouve la source auxiliaire (lampe Carcel), ce nicol n'est pas repéré ; il ne sert qu'à atténuer, dans un rapport d'ailleurs quelconque, l'éclat de cette source de comparaison. Du côté de A où l'on place la source à étudier, le nicol mobile entraîne une alidade mo-

---

([1]) Crova, *Étude des radiations* (*Annales de Chimie*, 5e série, t. XIX); — Cornu, *Études photométriques* (*Journal de Physique*, 1re série, t. X, p. 195).

([2]) Aubert, *Optique physiologique*, p. 232.

([3]) Cornu, *Études photométriques* (*loc. cit.*, p. 194).

bile sur un cercle divisé. Soit α la rotation de ce nicol à partir de l'extinction, la fraction de lumière qui traverse le tube A est $\sin^2\alpha$. C'est, par exemple, la proportion dans laquelle il faut réduire l'éclat intrinsèque I_r de la source inconnue pour l'amener à la même valeur que l'éclat L_r de la source auxiliaire. Ce qui précède suppose nulles les absorptions subies par les rayons lumineux dans leur trajet; mais, si a et b sont les proportions transmises de chaque faisceau, on aura

$$aI_r\sin^2\alpha = bL_r.$$

Une permutation des deux sources donnera

$$aL_r\sin^2\beta = bI_r,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{I_r}{L_r} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Quel que soit, du reste, dans cette première catégorie d'appareils, le moyen employé pour amener à l'égalité l'éclairement des deux plages voisines, il est clair que nous n'obtiendrons ainsi que le rapport des intensités *totales* des deux sources considérées. Si nous voulons les analyser d'une façon plus intime, il faudra isoler, dans les faisceaux qu'elles envoient, les radiations sur lesquelles doit porter la comparaison. On pourra arriver à ce résultat, d'une manière imparfaite, il est vrai, au moyen de verres colorés. C'est le mode de séparation qui a été employé par M. E. Becquerel.

Nous devons remarquer, enfin, à propos de cette comparaison de deux plages contiguës, que l'œil n'est pas capable de l'effectuer d'une façon absolument rigoureuse.

Bouguer a reconnu que cet organe devient insensible à leur différence lorsqu'elle n'est plus que la $\frac{1}{64}$ partie de l'éclat commun des deux sources, quel que soit, d'ailleurs, ce dernier. Désignons par $\frac{1}{n}$ cette fraction, par i et i' les valeurs intrinsèques des deux sources, par a et a' les proportions dans lesquelles elles sont amenées à l'éclairement des plages; on aura, lorsque l'égalité paraîtra établie,

$$a'i' = ai \pm \frac{1}{n}\,\frac{ai + a'i'}{2},$$

ou sensiblement

$$ai = a'i'\left(1 \pm \frac{1}{n}\right),$$

$$\frac{i}{i'} = \frac{a'}{a}\left(1 \pm \frac{1}{n}\right),$$

c'est-à-dire que le rapport des intensités sera connu par le rapport expérimental $\frac{a'}{a}$ avec une approximation de $\frac{1}{n}$ de sa valeur.

2° Cette imperfection inévitable de l'œil et, en même temps, cette propriété énoncée par Bouguer de la constance de n ont servi de point de départ à une seconde catégorie de méthodes qui consistent, non plus à juxtaposer, mais à superposer, du moins en partie, les plages correspondant aux deux sources, et à affaiblir l'éclairement de l'une d'elles jusqu'à ce qu'elle semble s'effacer et disparaître dans l'éclairement de l'autre. Si la loi de Bouguer est exacte, il est clair qu'à ce moment on a

$$a'i' = \frac{ai}{n}, \qquad \frac{i}{i'} = n\frac{a'}{a}.$$

Donc le coefficient n, qui, dans la méthode précédente, constituait, par son inverse, le terme de correction, constitue ici le coefficient de relation et, par conséquent, il a acquis une importance considérable. Aussi Masson (¹), qui a employé cette méthode dans ses recherches de photométrie électrique, s'est-il efforcé, d'abord, d'établir la constance de ce coefficient. Il a trouvé, en effet, que ce nombre n était indépendant de l'éclat moyen et de la couleur des plages et qu'il variait, ainsi que l'on doit s'y attendre, avec l'observateur. En réalité, ce nombre n, qui a servi à définir ce que l'on appelle la *sensibilité pour les différences*, n'est absolument constant dans aucun cas. M. Helmholtz a fait remarquer qu'il ne pouvait être indépendant de l'éclat, lorsqu'il s'agit de faibles intensités; d'un autre côté, la sensibilité pour les différences n'est pas indépendante de la couleur; elle paraît, au contraire, liée au phénomène de Purkinje par la relation (²)

$$n' = nA,$$

A étant le coefficient qui caractérise ce phénomène pour les radiations correspondant aux sensibilités n et n'. Il en résulte que la constance de n est liée à la constance de A; or, si A est constant pour toutes les radiations moins réfrangibles que le vert moyen, sa valeur et, par suite, celle de n vont en diminuant à mesure que l'on choisit, pour la comparer à l'une des radiations rouge-vert, des radiations de plus en plus réfrangibles. Par exemple, si

---

(¹) *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. XIV.

(²) Macé de Lépinay et Nicati, *Photométrie hétérochrome* (*Annales de Chimie et de Physique*, 5ᵉ série, t. XXX, p. 165).

l'on admet pour la région rouge-vert le nombre $n = 64$, donné par Bouguer pour la lumière blanche, on déduira, des valeurs connues de A, et dans le cas le plus favorable d'une image rétinienne de faible étendue,

λ.	*n*.
$0^{\mu},430$,	54,4.

On voit, par ces nombres, que la méthode actuelle ne paraît pas devoir se prêter à des déterminations précises, du moins dans les cas où l'intensité et la couleur sont susceptibles de varier dans des proportions considérables.

3° Enfin une troisième catégorie de photomètres comprend les appareils où l'on superpose, non plus partiellement, mais d'une façon complète, les deux faisceaux lumineux émanés des sources. On produit alors dans ce champ commun un phénomène qui disparaîtra lorsque l'égalité d'éclat sera obtenue. C'est le principe du photomètre proposé par Arago, jamais employé du reste, et qui repose sur ce fait que les anneaux des lames minces, réfléchis et transmis, produits par une même source, sont complémentaires en intensité et en coloration. C'est aussi le principe du photomètre attribué à Babinet et dans lequel on s'appuie sur le fait d'égalité des quantités de lumière polarisée qui se trouvent dans un faisceau réfléchi ou réfracté. C'est, enfin, le principe des appareils à franges complémentaires et, en particulier, du photomètre de M. H. Wild (1).

Spectrophotomètres.

Nous avons vu que ces différents photomètres peuvent être appliqués à l'étude de radiations isolées, à condition de munir l'œil de systèmes transparents colorés qui ne laissent passer que certains groupes de radiations à peu près déterminés ; mais il est clair que la comparaison ne sera exacte et même possible dans toute la série des couleurs que si les deux lumières sont réduites en spectres sur lesquels s'effectuera la mesure. Cette application du spectroscope aux observations photométriques a été faite pour la première fois par M. Govi (2), en 1860, et les appareils fondés sur ce principe ont pris le nom de *spectrophotomètres*. D'après ce qui a été dit précédemment, on ne s'étonnera pas de voir la première et la troisième méthode photométrique adaptées exclusivement à ces appareils.

(1) *Poggendorff's Annalen*, Bd. XLIX, p. 235; 1856.
(2) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. L, p. 156.

A la première se rattache d'abord l'appareil de M. Govi dans lequel les deux faisceaux lumineux étaient reçus sur les deux moitiés de la fente du spectroscope : on obtenait ainsi, sur un écran de Foucault, deux spectres juxtaposés dans lesquels un diaphragme permettait d'isoler deux plages correspondantes. Pour les amener à l'égalité, on déplaçait l'une des sources. M. Vierordt ([1]), dans ses études sur l'absorption de la lumière par les milieux transparents, décrivit un appareil analogue au précédent, mais dans lequel l'égalité des plages de même réfrangibilité était obtenue par l'obturation plus ou moins complète de l'un des faisceaux sur la fente du spectroscope. Pour cela, la fente était formée, d'un côté, par une lame fixe, de l'autre, par une double lame dont les moitiés, munies de vis micrométriques, permettaient de donner à chaque partie de la fente une largeur connue. L'éclat de chaque spectre était proportionnel à la largeur de la fente correspondante, du moins tant que cette largeur ne s'exagère pas au point de rendre impur le spectre qu'elle détermine ; auquel cas, les plages cessent absolument d'être comparables. C'est là un défaut très grave de cet appareil lorsqu'il est appelé à déterminer des rapports un peu grands d'intensité. Enfin le troisième mode de réduction, basé sur la loi de Malus, a été appliqué à cette même méthode par M. Glan ([2]) ; la fente du spectroscope est partagée en deux moitiés par une lame transversale de laiton et les deux spectres, non juxtaposés, que donnerait l'appareil, sont transmis à travers un prisme de Wollaston qui donne de chacun d'eux deux images polarisées à angle droit. Pour une largeur convenable de la lame de laiton, deux de ces spectres, appartenant chacun à l'une des moitiés de la fente et polarisés à angle droit, peuvent être amenés au contact, et l'égalité des plages ainsi juxtaposées s'obtient au moyen d'un nicol placé entre le prisme de Wollaston et le système dispersif. Cet appareil est sujet à quelques critiques, bien qu'il repose sur le principe fort juste, dû à Foucault, de la comparaison de deux plages de teinte uniforme, rigoureusement juxtaposées et dont la ligne de démarcation doit disparaître au moment de l'égalité. C'est qu'en effet le dispositif de M. Glan ne permet pas de satisfaire à ces conditions essentielles. D'abord, les deux plages, formées de rayons émanés du prisme de Wollaston, les uns à l'état ordinaire, les autres à l'état extraordinaire, ne pourront être au point en même temps, et leur démarcation manquera de net-

---

([1]) *Poggendorff's Annalen*, 5e série, Bd. XX, p. 172 ; 1870.
([2]) *Wiedemann's Annalen*, Bd. I, p. 353 ; 1877.

teté. En outre, l'angle de duplication n'étant pas le même pour les rayons de toute réfrangibilité, le contact des spectres n'aura lieu rigoureusement qu'en un point. Nous verrons comment, dans le spectrophotomètre qui a servi aux recherches actuelles, M. Crova, en conservant le principe excellent de Foucault, a évité les inconvénients nombreux de l'appareil de M. Glan.

Enfin, M. Gouy (¹) a donné la description d'un instrument spécialement affecté à l'étude des spectres discontinus et de très faible éclat.

Les spectrophotomètres à franges découlent tout naturellement des photomètres de ce genre dont nous avons parlé. C'est ainsi que M. Wild (²) a pu transformer son appareil en spectrophotomètre par la seule interposition d'un prisme d'Amici à arêtes horizontales entre le rhomboèdre de spath et le polariscope de Savart. Déjà M. Trannin (³) avait donné la description d'un appareil analogue au précédent et dans lequel on produit deux spectres cannelés de Fizeau et Foucault, que l'égalité d'intensité fait disparaître dans les diverses radiations. D'après M. Wild, la sensibilité de ce phénomène de disparition des franges est telle, qu'elle permet une approximation de $\frac{1}{500}$ à $\frac{1}{1000}$. Il y a de sérieuses raisons de penser que cette limite de sensibilité est loin d'être atteinte, et d'ailleurs la construction fort compliquée de ces appareils rendrait cette sensibilité illusoire au point de vue de l'approximation des mesures. De plus, au point de vue pratique de la fatigue de l'œil, ce mode d'observation est défectueux; la frange, en effet, disparaît à la fois, parce que son éclat se rapproche de celui des parties voisines et aussi parce qu'elle semble se rétrécir peu à peu à mesure qu'elle s'éclaire. De là, pour l'œil qui doit suivre ces variations de contour, une attention et par suite une fatigue fort préjudiciables aux observations. Aussi ne faut-il pas s'étonner si les polarimètres fondés sur ce principe ont été peu à peu abandonnés dans la pratique et remplacés par les polarimètres à pénombre, c'est-à-dire à plages juxtaposées.

Appareil photométrique. — Le spectrophotomètre de M. Crova employé dans ces recherches échappe à la plupart des reproches précédents. Il a été établi, par son auteur, après une étude complète des imperfections des appareils alors existants (⁴) et des conditions auxquelles doivent satisfaire les

---

(¹) *Annales de Chimie et de Physique*, 5ᵉ série, t. XVIII, p. 16; 1879.
(²) *Wiedemann's Annalen*, t. XX, p. 452; 1883.
(³) *Mesures photométriques* (*Journal de Physique*, 1ʳᵉ série, t. V, p. 297; 1876).
(⁴) *Sur les spectrophotomètres* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCII, p. 36).

différentes parties de l'instrument pour remédier, autant que possible, aux défauts inévitables des images spectrales ([1]). La description complète en a été donnée par M. Crova ([2]); nous ne reviendrons donc pas sur les détails de sa construction, nous bornant à en rappeler les dispositions les plus importantes. La fente collimatrice, parfaitement régulière dans toute sa longueur, reçoit, sur sa moitié inférieure, les rayons d'une première source placée dans la direction de l'axe du tube et, sur sa moitié supérieure, les rayons de la seconde source placée latéralement. La ligne de séparation des deux faisceaux, au moment où ils pénètrent ainsi dans l'appareil, est constituée par l'arête, perpendiculaire à la fente, d'un prisme à réflexion totale qui ramène, dans la direction de l'axe, les rayons émanés de la source latérale. Après avoir traversé le collimateur et le système des prismes, ces deux faisceaux viennent former, dans le plan focal de l'oculaire, les images spectrales des deux moitiés de la fente, superposées et se touchant sur toute leur longueur, si l'arête du prisme à réflexion totale est bien perpendiculaire à la fente.

On voit, à ce dernier point de vue, l'avantage de cette disposition sur celles où le prisme a ses arêtes parallèles à la fente et où, par conséquent, la délimitation des faisceaux se fait par le plan tout entier de la section droite. Seulement, dans ces conditions, la fente collimatrice devrait être horizontale, ainsi que les arêtes des prismes dispersifs, ce qui est un ennui pour l'observation des spectres. Un premier moyen d'obvier à cet inconvénient consisterait à laisser l'arête des derniers prismes verticale et à placer, entre la fente horizontale et l'objectif du collimateur, un prisme redresseur analogue à celui du spectroscope à fente inclinée ([3]) : ce prisme, placé à 45° sur la direction de la fente, donnerait de celle-ci une image virtuelle verticale, c'est-à-dire parallèle aux arêtes des prismes. M. Crova a résolu la question d'une manière plus commode, en laissant la fente verticale et plaçant sur la face horizontale du premier prisme à réflexion totale la face correspondante d'un second prisme dont les arêtes, et par suite la face hypoténuse, sont parallèles à l'axe du collimateur. En réalité, ces deux

---

([1]) *Étude des aberrations des prismes et de leur influence sur les observations spectroscopiques* (*Annales de Chimie et de Physique*, 5e série, t. XXII, p. 513).

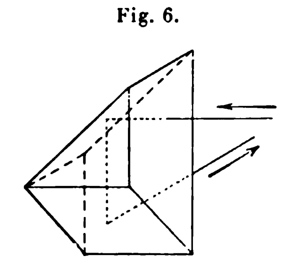
([2]) *Description d'un spectrophotomètre* (*Annales de Chimie et de Physique*, 5e série, t. XXIX; 1883).

([3]) Garbe, *Note sur un spectroscope à fente inclinée* (*Journal de Physique*, 2e série, t. II, p. 318; 1883).

prismes sont réunis en un seul, constituant ainsi un prisme à double réflexion totale (*fig.* 6), qui peut glisser devant la fente à $0^{mm},2$ de distance environ.

La fente et le prisme sont protégés par une boîte en laiton noirci qui présente deux ouvertures : l'une dans le prolongement de l'axe de l'appareil et

Fig. 6.



à la hauteur de la demi-fente libre, l'autre latérale et dont l'axe vient passer au centre de la face du prisme par laquelle pénètrent les rayons. Sur l'une ou l'autre de ces ouvertures peut se visser un double tube qui porte, d'une part, un nicol analyseur fixe ; d'autre part, un nicol polariseur dont les déplacements sont lus sur un cercle vertical.

Le nicol fixe pourrait être placé à l'intérieur du collimateur et derrière la fente ; cette disposition a l'avantage que les deux faisceaux, étant obligés de traverser ce nicol avant d'atteindre les prismes dispersifs, se présentent à la réflexion sur les faces obliques de ceux-ci avec le même plan de polarisation, c'est-à-dire dans des conditions identiques. Mais elle a d'autres inconvénients qui l'ont fait écarter. D'abord, l'interposition d'un système réfringent entre la fente et la lentille du collimateur change le point et aussi les conditions d'achromatisme. En outre, le faisceau ordinaire rejeté par le nicol peut, s'il est intense, illuminer les défauts du spath ou l'intérieur du tube et, par suite, diminuer l'exactitude des observations. Enfin l'application de la loi de Malus dans ces conditions peut être rendue inexacte par le fait de la polarisation elliptique variable que les rayons émanés du nicol mobile éprouvent au moment de leur réflexion totale. On remarquera, cependant, que la double réflexion totale sur des plans rectangulaires entre eux réduit l'ellipticité du rayon à la différence d'ellipticités très voisines, ce qui n'aurait pas lieu avec un prisme réflecteur simple. Quoi qu'il en soit, on a préféré disposer le nicol fixe avant la fente et de façon que sa section principale fût sensiblement verticale. Dès lors, l'ellipticité du rayon, en admettant qu'elle existât encore, n'eût pas modifié son intensité ; et d'ailleurs, la vibration à la

sortie du prisme réflecteur ne différait pas sensiblement d'une vibration rectiligne horizontale.

Enfin, pour que le faisceau qui avait traversé la demi-fente libre se présentât dans les mêmes conditions aux prismes dispersifs, il suffisait de le faire passer, avant son entrée dans l'appareil, au travers d'un nicol à section principale horizontale. Il était important de s'assurer, avant toute mesure, que les nicols employés étaient assez exactement centrés pour que la rotation du nicol mobile ne modifiât pas le champ lumineux sur la demi-fente correspondante. Pour cela, l'un des nicols étant enlevé, on éclaira les deux parties de la fente au moyen de deux sources constantes et, ayant amené les deux plages à l'égalité, on fit tourner le nicol restant. L'égalité des plages ne fut pas troublée d'une façon appréciable, que l'épreuve eût lieu avec l'un ou avec l'autre des deux nicols. On pouvait être assuré, par suite, qu'aucune perturbation ne se produirait lorsque les deux prismes fonctionneraient ensemble. L'excentricité du faisceau transmis par le nicol mobile entraînerait une erreur d'une autre nature, consistant en ce que les déplacements de l'alidade ne représenteraient plus exactement les rotations du plan de polarisation. M. Bakhuysen ([1]) a montré qu'il suffit, dans ce cas, de prendre la moyenne de deux observations faites dans deux quadrants opposés. Il en résulte un nouveau mode de vérification du centrage des prismes de Nicol fonctionnant simultanément et qui consiste à établir l'égalité des plages pour deux positions de l'alidade distantes d'environ 180°. L'expérience, faite dans ces conditions, a montré que l'erreur ainsi constatée ne dépasse pas 10′, c'est-à-dire qu'elle est de l'ordre des erreurs d'observation. Il suffira donc, après avoir noté exactement la position d'extinction du nicol, d'établir l'égalité des éclairements pour une seule position du nicol mobile et de prendre la différence. L'expérience peut ainsi être faite très rapidement, ce qui n'est pas sans importance dans des déterminations de ce genre où les courants qui produisent l'incandescence peuvent varier d'intensité et où l'œil se fatiguerait par des observations trop longues ou trop fréquentes. Les deux prismes de Nicol dont nous venons de parler avaient, d'ailleurs, été construits avec beaucoup de soin par M. J. Duboscq : ce sont des prismes à faces normales aux arêtes et collés à l'huile de lin suivant la disposition imaginée par Prazmowski.

([1]) *Poggendorff's Annalen*, Bd. CXLV, p. 259.

Réglage et graduation en longueurs d'onde du spectrophotomètre.

Le réglage de l'appareil comprend les opérations suivantes, sur lesquelles il est inutile d'insister, bien qu'elles aient, néanmoins, leur importance au point de vue de la précision des mesures :

1° Mettre la fente collimatrice au foyer de la lentille ;

2° Régler la fente parallèlement aux arêtes des prismes ;

3° Que le plan dans lequel se déplace l'axe optique de la lunette soit perpendiculaire à ces arêtes ;

4° Placer la fente oculaire, destinée à limiter les plages, parallèlement à ces arêtes.

Une fois l'appareil réglé, il faut le graduer, c'est-à-dire construire la Table qui permettra de passer des positions occupées par la lunette aux longueurs d'onde des radiations qui occupent alors le milieu de la fente oculaire.

On a pris, comme point de départ, la raie du sodium et la division 10 de la graduation oculaire. En effet, pour cette position, l'axe de la lunette est sensiblement dans la direction de l'axe du collimateur et, en outre, les angles des prismes dispersifs ont été calculés de telle sorte que l'appareil fût à vision directe pour la région du spectre comprise entre le jaune et le vert. Il en résulte que la raie du sodium se produit alors vers le milieu du champ. On fait coïncider avec le milieu des deux raies la division 100 du micromètre éclairé que porte latéralement l'appareil, puis on déplace les deux bords de la fente oculaire de façon qu'ils touchent extérieurement les divisions 99 et 101. De cette manière, l'intervalle des raies D se trouve exactement au milieu de la fente, laquelle est fixée définitivement dans cette position. Tout d'abord, on construit la courbe des indications du vernier oculaire en fonction des divisions du micromètre éclairé : cette courbe a été trouvée ici une droite parfaite. Puis on a éclairé la fente du collimateur soit par le Soleil, soit par une flamme chargée de vapeurs métalliques, soit par l'étincelle d'induction jaillissant entre deux électrodes également métalliques. Dans le premier cas, on amenait la fente oculaire à comprendre, en son milieu, les raies noires servant de repères ; dans les deux autres cas, et comme il était bon de pouvoir embrasser d'un coup d'œil le spectre brillant de la vapeur ou de l'étincelle, on avait élargi le champ de l'oculaire et l'on repérait les raies brillantes sur le micromètre éclairé : il suffisait de se reporter à la droite précédemment tracée pour

ramener les indications du micromètre à celles du vernier oculaire. On construisit alors la courbe qui avait pour abscisses les positions de ce vernier et pour ordonnées les longueurs d'onde correspondantes. Le Tableau suivant donne les points qui ont servi à la construction de cette courbe :

Longueur d'onde en millièmes de millimètre.	Nature des sources.	Position du vernier oculaire.
$\overset{\mu}{0},7680$..........	K (flamme).	6,40
6866..........	Raie B (Soleil).	7,58
6700..........	Li (flamme).	7,88
6562..........	Raie C (Soleil) et H (étincelle).	8,22
6350..........	Sr (flamme).	8,67
5889..........	Raie D (Soleil) et Na (flamme).	10,00
5600..........	Ca (Soleil).	11,05
5404..........	Ti (Soleil).	11,90
5266..........	Raie E (Soleil).	12,58
5172..........	Mg (étincelle).	13,05
4861..........	Raie F (Soleil) et H (étincelle).	15,02
4721..........	Zn (étincelle).	16,12
4607..........	Sr (flamme).	17,10

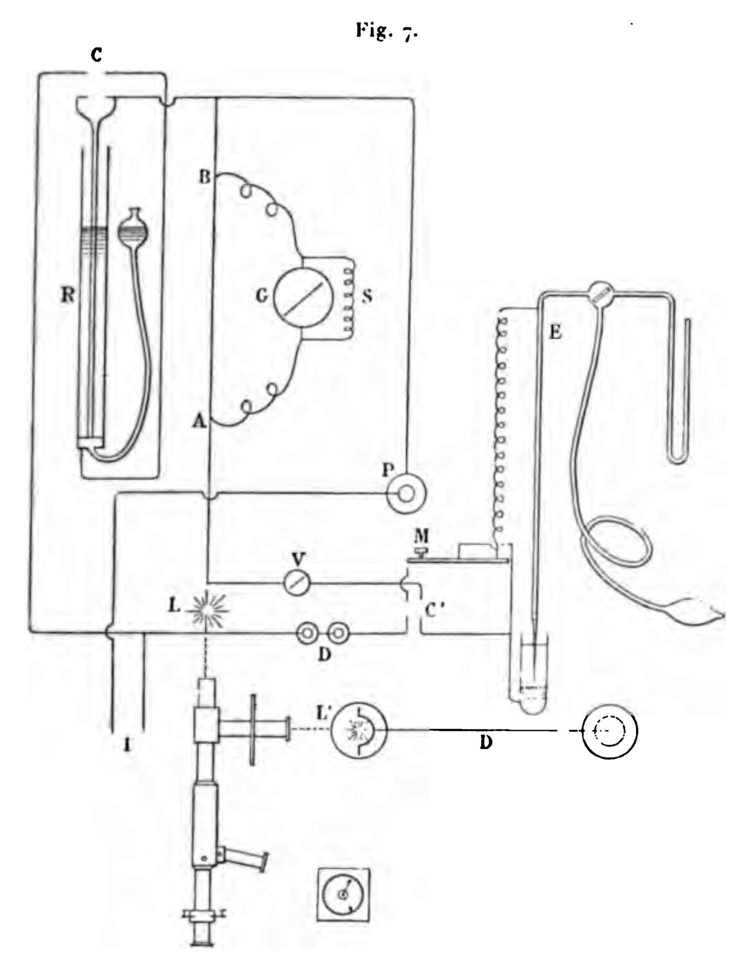
IV. — Disposition générale des appareils.

Mesure de l'énergie dépensée.

La première disposition employée pour la mesure de l'énergie dépensée dans la lampe est représentée *fig.* 7; elle comprend l'électromètre capillaire E. Le courant est fourni par des éléments Bunsen associés en tension et constituant la pile P; on fait varier l'intensité du courant, d'abord en modifiant le nombre des éléments et ensuite par l'emploi d'un rhéostat à mercure R dont les fils peuvent être mis en dérivation, à la fois sur la lampe à incandescence L et le galvanomètre G. Par le jeu d'un commutateur C, on peut employer, pour former cette dérivation, soit un seul des fils du rhéostat, soit les deux fils, en quantité ou en tension. En V est un voltmètre à très grande résistance, que l'on consulte avant de mettre en prise l'électromètre capillaire. Pour cela, on établit un pont en diagonale sur C' et l'on dispose le nombre des daniells d'opposition D de façon que la déviation du voltmètre indique une force électromotrice positive ou négative inférieure à $0^{\text{dll}},5$. On place alors, en conséquence, le commutateur C' de façon à polariser toujours le ménisque par l'hydrogène, puis, abaissant la manette M, on met l'électromètre en prise. Cette manœuvre, pour être faite

avec soin, demandait donc un certain temps et, avec des éléments aussi variables que les bunsens, il ne fallait pas s'attendre à conserver au courant la même valeur pendant l'observation photométrique et pendant la mesure électrique ainsi effectuée. Aussi a-t-on trouvé plus commode et plus sûr de

Fig. 7.



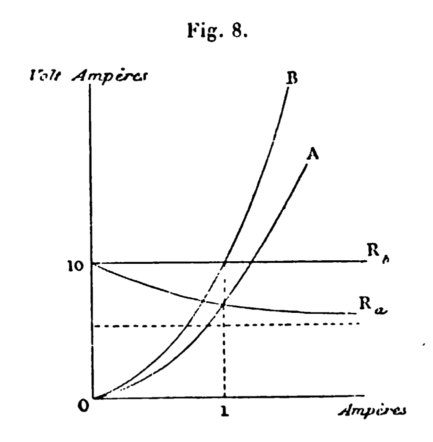
Première disposition des appareils : Lampe Maxim. — Électromètre capill. — Élém. Bunsen.

graduer, une fois pour toutes, la lampe en énergies, c'est-à-dire de construire la courbe qui donne les énergies dépensées dans la lampe en fonction des intensités du courant qui la traverse.

Cette courbe serait une parabole $y = a\,x^2$ si la résistance a de la lampe demeurait constante à toute température; mais, pour le charbon, on sait que cette résistance diminue à mesure que le filament s'échauffe et, par suite, la courbe réelle sera comprise entre la parabole précédente où a serait

la résistance à froid, et l'axe des x. La (*fig.* 8) représente ces deux courbes pour une lampe Maxim dont la résistance à froid était de 10 ohms. A est la

Fig. 8.



courbe réelle, B la courbe $y = 10x^2$, x étant exprimé en ampères et y en volt-ampères. Cette courbe A a été construite d'après le Tableau suivant :

19 Mars 1884.

Nombre de bunsens.	Intensités du courant en ampères.	Différences de potentiel en volts.	Énergies en watts.	Résistances de la lampe.
0....	0,000	0,000	0,000	10,000
4....	0,788	0,700	4,495	7,206
»....	0,868	6,204	5,386	7,148
5....	1,020	7,067	7,209	6,919
6....	1,213	8,205	9,959	6,764
»....	1,260	8,428	10,625	7,688
»....	1,265	8,472	10,725	7,687
7....	1,347	8,915	12,293	7,610
7....	1,414	9,307	13,170	7,582
»....	1,474	9,643	14,213	7,544
»....	1,508	9,822	14,820	7,513
»....	1,542	10,027	15,465	7,509
»....	1,656	10,683	17,696	6,445

Sur l'échelle des volt-ampères, on a figuré, en fonction des intensités, les résistances correspondant à chacune de ces deux courbes. Pour l'une, B, la résistance est constante et égale à 10^{ohms}; pour l'autre, elle va en diminuant, ainsi qu'on devait s'y attendre. Bien que la connaissance de cette résistance de la lampe, à chaque instant, ne soit pas utile, il a paru bon cependant de la calculer, comme contrôle des déterminations de l'intensité et de la diffé-

rence de potentiel. Il est clair, en effet, que, ses variations devant être régulières, toute anomalie constatée dans ces variations serait l'indice d'une erreur commise dans l'expérience. On peut remarquer, en passant, que la courbe R_a, qui représente cette résistance, tend à devenir asymptote à une parallèle à l'axe des intensités; elle satisfait, d'ailleurs, assez bien à la relation

$$R = 5,387 + \frac{2,265}{i + 0,49},$$

c'est-à-dire que la résistance de la lampe tend vers une valeur presque moitié de ce qu'elle est à froid. Nous retrouverons plus loin un résultat analogue.

La seconde disposition, avec laquelle ont été faites les déterminations relatives à une autre lampe du genre Swan, est représentée *fig.* 9.

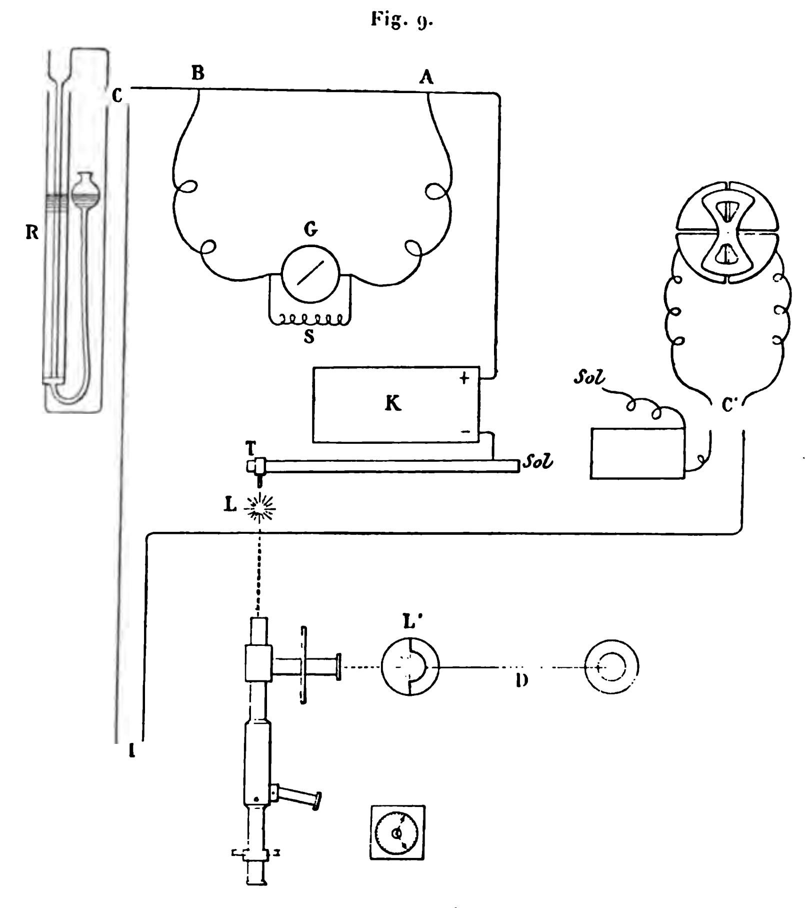
L'électromètre capillaire est remplacé par l'électromètre Thomson, fonctionnant ainsi qu'il a été dit précédemment, et les éléments Bunsen par des accumulateurs. Une des bornes de la lampe à incandescence L communique à l'une des paires de secteurs de l'électromètre, tandis que l'autre borne est reliée au sol par l'intermédiaire d'une forte tringle de laiton dont la résistance est absolument négligeable. C'est à cette tringle qu'aboutit également le pôle négatif de la batterie K des accumulateurs, lequel se trouve ainsi en communication avec le sol. Les accumulateurs employés étaient du type dit Faure-Sellon-Wolkmar et de 40 ampère-heures, c'est-à-dire que chacun d'eux était susceptible de fournir, pendant quarante heures, un courant de 1 ampère avec une force électromotrice voisine de 2 volts. Comme la lampe employée n'exigeait pas 12 volts pour être amenée en pleine incandescence, on avait disposé, dans la boîte K, six de ces appareils et leurs pôles communiquaient à demeure avec les bornes d'un commutateur à 6 éléments de M. Crova, placé sur le couvercle. De cette façon, et par un simple jeu de la clef du commutateur, on pouvait obtenir les combinaisons suivantes :

Tension.	Surface.	Produit.
6	1	6
3	2	6
2	3	6
1	6	6

Il importe, en effet, que la force électromotrice totale du circuit soit de très peu supérieure à la différence de potentiel aux bornes de la lampe; car,

si δ est la différence de ces deux quantités pour une intensité i du courant, il y a en dehors de la lampe une perte δi d'énergie qui est employée uniquement à échauffer les conducteurs. En outre, il est absolument nécessaire

Fig. 9.



Seconde disposition des appareils : Lampe Swan. — Électromètre Thomson. — Accumulateurs.

que *tous* les accumulateurs participent ensemble, et de la même manière, à l'entretien du courant, ainsi que cela est réalisé par la disposition précédente; sans quoi les uns se videraient, tandis que les autres conserveraient une partie de leur charge, et il deviendrait fort difficile de les recharger simultanément. Enfin il est une circonstance qu'il ne faut pas perdre de vue et qui légitime cette association des éléments en surface, autant que l'expérience le permet : c'est que, pour une charge donnée d'un accumulateur, la fraction de cette charge débitée en régime constant sera d'autant

plus voisine de 1 que la *densité* du courant de décharge à travers les accumulateurs sera plus faible. En d'autres termes, pour avoir un courant bien constant pendant toute sa durée, il faut employer des surfaces très grandes par rapport au courant qui les traverse [1]. Dans ces conditions et lorsque la densité ne dépasse pas $0^{amp},1$ par décimètre carré, la charge presque entière de la pile se débite avec une régularité remarquable. Mais les précautions que nous venons d'indiquer sont indispensables, si l'on veut se garder des mécomptes et tirer des accumulateurs toutes les ressources que ces excellents appareils sont susceptibles de fournir. A la fin de chaque série d'expériences, tous les éléments étaient réunis en surface; de cette façon, si, la batterie étant presque épuisée, la force électromotrice de quelques-uns des accumulateurs avait un peu baissé, ces éléments se rechargeraient lentement sous l'action des autres jusqu'à ce que la force électromotrice fût égale sur tous. C'est toujours après un pareil nivellement qu'on rechargeait les accumulateurs. Pour cela, après les avoir disposés en tension, on amenait aux deux bornes de la batterie les fils d'une machine Gramme type d'atelier, actionnée par un moteur Otto de la force de quatre chevaux; mais, comme la machine n'aurait pas manqué de s'inverser sous l'action de la charge résiduelle des accumulateurs, on ne lançait le courant dans ceux-ci qu'après avoir amorcé la machine sur une résistance auxiliaire faible.

Le débit de la machine marchant à 1000 tours étant trop fort et dangereux pour la conservation des accumulateurs, il a fallu, puisque la vitesse ne pouvait être modifiée, diminuer par un autre moyen la différence de potentiel aux bornes. On y est parvenu d'une façon très simple et très commode en remplaçant le calage fixe des balais par un calage mobile qui permettait d'incliner à volonté le diamètre des points de contact sur la ligne des pôles. En opérant ainsi avec un courant de 4 à 5 ampères, on pouvait juger que la charge des accumulateurs était atteinte lorsque l'eau s'y décomposait tumultueusement; ce qui n'eût pas été un indice suffisant avec un courant de charge plus considérable. Si l'on a insisté aussi longuement sur les précautions à prendre dans la charge et la décharge des piles secondaires, c'est que, dans des expériences de ce genre où les déterminations photométriques ne peuvent pas se faire instantanément, la précision

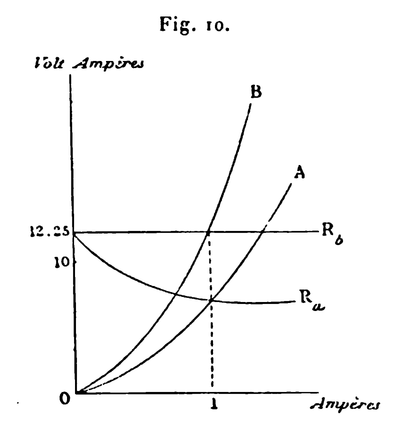
---

[1] CROVA et GARBE, *Sur les régimes de charge et de décharge des accumulateurs* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CI, p. 205).

des mesures tiendra, en grande partie, à la constance du courant. Or il ne paraît pas que, à ce point de vue, aucun générateur soit supérieur aux accumulateurs bien conduits et judicieusement employés. Leur résistance presque nulle, leur force électromotrice considérable, la commodité de leur usage et la facilité de leur conservation sont autant de propriétés qui les feront substituer aux piles toutes les fois qu'il ne sera pas nécessaire de produire un courant d'une densité trop grande, ce qui est le cas ici.

Avec cette nouvelle disposition il devenait possible de faire, pour chaque observation, les deux déterminations électriques et la mesure photométrique. On a néanmoins construit, pour la lampe Swan, la courbe des énergies, comme on l'avait fait pour la lampe Maxim. La *fig.* 10 représente

Fig. 10.



cette courbe, avec la parabole correspondant à la résistance de 12^ohms^,25 que la lampe possède à froid. La courbe R_a des résistances montre que, ici encore, cette résistance, après avoir diminué très rapidement, prend une valeur sensiblement constante (6^ohms^,5) et presque égale à la moitié de la résistance à froid. Il semble même, mais le fait aurait besoin d'être confirmé, que cette résistance passe, pour une intensité de 1^amp^,3 environ, par un minimum égal à 6^ohms^,42. Quoi qu'il en soit de l'existence de ce minimum, il ne faut pas le confondre avec celui que M. W. Preece a signalé dans les différents types de lampe à incandescence comme caractérisant aux fortes intensités le commencement de la destruction du filament. En effet, la différence de potentiel n'était alors que de 8^volts^ environ, c'est-à-dire bien inférieure à celle de régime normal; de plus, après plusieurs mois d'expérience, le globe de la lampe n'avait pas noirci. En outre, les mesures directes de résistance, faites de distance en distance, montraient que le filament n'avait

subi, de ce côté, aucune modification. Ainsi, une expérience faite le 4 juillet, c'est-à-dire après cinq mois de fonctionnement, donne, pour résistance de la lampe, $6^{\text{ohms}},42$ au lieu de $6^{\text{ohms}},44$, c'est-à-dire une différence faible et, d'ailleurs, en sens inverse de celle qui résulterait de l'altération du filament. Nous ne voulons pas conclure de ce fait que les lampes à incandescence ne s'usent pas; mais il y a une différence capitale entre le régime, pour ainsi dire au maximum, d'une lampe en service d'éclairage et le régime d'expérience adopté ici et où la lampe était ménagée avec le plus grand soin.

Il reste un mot à dire sur l'approximation avec laquelle se feront les mesures d'énergie. En désignant cette quantité par W, par E et I la différence de potentiel et l'intensité, on a

$$W = EI.$$

Par suite,

$$\log W = \log E + \log I$$

et, en différentiant,

$$\frac{dW}{W} = \frac{dE}{E} + \frac{dI}{I}.$$

L'erreur relative d'énergie est la somme des erreurs relatives de E et de I. Or, d'après ce qui a été dit au sujet de l'électromètre, on trouve $\frac{dE}{E} = \frac{1}{480}$ pour $E = 10$ volts environ. On obtient de même, pour $I = 1$ ampère, $\frac{dI}{I} = \frac{1}{500}$. Donc $\frac{dW}{W} = \frac{1}{250}$ environ. C'est de l'ordre de grandeur de la différence constatée plus haut dans la valeur de la résistance.

Mesures de l'intensité lumineuse.

Le spectrophotomètre, réglé et gradué comme il a été dit (p. 47), était repéré au soleil, c'est-à-dire qu'on déterminait la position du nicol mobile qui amenait l'extinction de l'un des spectres. Dans quelques expériences, on disposait l'alidade au zéro, puis on établissait l'extinction en faisant tourner le nicol à frottement dur dans le tube : les déterminations devant se faire par une seule lecture, il était important que cette position zéro du nicol fût bien exactement fixée. Aussi, pour éviter tout dérangement accidentel, les pièces métalliques étaient soigneusement goupillées et, de plus, on prenait soin de vérifier le zéro avant et après chaque série de mesures.

La fente oculaire étant pointée sur la raie du sodium lorsque le vernier est à la division 10, on règle l'écartement de cette fente; puis, visant directement la lampe à incandescence L (*fig*. 7 et 9) et latéralement la lampe Carcel L′ montée sur la balance photométrique D, on tourne le nicol mobile à 65° environ de l'extinction et l'on fait passer dans la lampe le courant le plus intense qui doive la parcourir. Visant alors dans la partie bleue du spectre, on règle la distance aux deux sources, de façon à obtenir l'égalité des plages. Cela fait, on modifie la largeur de la fente collimatrice jusqu'à ce que l'éclat de ces plages soit à peine égal à celui que posséderait la plaque du photomètre Foucault sous l'action d'un carcel placé à 1^m de distance. Il ne reste plus qu'à terminer le réglage en mettant exactement au point sur la fente et en déplaçant l'appareil devant les sources jusqu'à ce que les plages soient uniformément éclairées et que leur ligne de démarcation soit absolument nette et très fine. L'appareil est alors invariablement fixé dans cette position.

C'est de part et d'autre de cette ligne de démarcation et dans son voisinage que se trouvent les plages qu'il s'agit d'amener à l'égalité par la rotation du nicol. En ce qui concerne cette opération, il est difficile d'indiquer des règles absolues; mais, d'une manière générale, il faut éviter de fatiguer l'œil par une observation trop attentive. Voici comment on opérait : la lampe Carcel étant en régime normal, on établissait le courant en I et, après avoir placé l'œil de façon à apercevoir dans le champ toute la hauteur des deux demi-fentes, on amenait rapidement, et par trois ou quatre oscillations, le nicol à la position présumée d'égalité. Cela fait, on fermait l'œil, tout en le maintenant en place, et, après un temps de repos, on l'ouvrait brusquement en fixant la ligne de démarcation des plages. En général, on trouvait une différence qui n'aurait pas tardé à s'atténuer par une observation plus prolongée, mais que l'on faisait disparaître aussitôt en déplaçant légèrement le nicol. Puis on fermait l'œil de nouveau et l'on recommençait l'observation en ouvrant et fermant l'œil à intervalles très rapprochés, de façon à modérer l'action sur la rétine, tout en observant d'une manière continue. L'approximation obtenue dans ces mesures ne peut être définie exactement; elle dépend de la sensibilité de l'œil pour les différences : Bouguer avait trouvé $\frac{1}{64}$ pour la lumière blanche, c'est-à-dire pour le jaune; mais ici, grâce au soin que l'on a pris de délimiter exactement les plages juxtaposées, grâce à l'obturation de ces mêmes plages, on arrive à une sensibilité voisine de $\frac{1}{100}$. En réalité, cette sensibilité, constante depuis le rouge jus-

qu'au vert, diminue ensuite considérablement lorsqu'on s'avance vers le violet : nous en avons vu la raison (p. 41). Il se présente même, dans la partie bleue du spectre, une circonstance qui tend à diminuer encore cette sensibilité et qui disparaît lorsque, au lieu de viser directement la ligne de démarcation, on dirige l'œil un peu à côté et sur le prolongement de cette ligne. On trouve l'explication de ce fait assez étrange dans l'observation suivante de M. A. Charpentier ([1]). Ayant produit une lumière de faible intensité que l'œil aperçoit, *pourvu qu'il ne la regarde pas directement*, il constate que, pour que le même œil la voie directement, cette lumière doit devenir plus intense. Il doit donc exister, au centre de l'œil, une portion de la rétine moins sensible que les parties voisines. Or les expériences anatomiques montrent qu'il existe, en effet, en cet endroit, une portion moins riche que le reste de l'organe en pigment rouge.

Si, comme l'indiquent MM. Macé de Lépinay et Nicati ([2]), qui ont eu l'occasion d'appliquer cette observation à leurs expériences, cette partie centrale est teintée de jaune, il en résultera que, pour les radiations bleues, elle sera moins sensible aux différences que les parties voisines. En tous cas, et même en admettant simplement un défaut général de sensibilité de la rétine en ce point, on conçoit qu'il y ait avantage, dans ces parties les plus réfrangibles du spectre qui sont toujours les moins intenses, à diriger l'œil non pas sur la ligne même de démarcation, mais à côté et en dehors des plages.

Il importe, maintenant, de nous rendre compte de ce que signifient, au point de vue photométrique particulier auquel nous nous sommes placé, les rotations du nicol mobile établies et mesurées ainsi qu'il a été dit. Désignons par i l'intensité intrinsèque d'une radiation dans la portion de la source type visée par le nicol; la valeur du champ lumineux produit par cette radiation sur le plan de la fente collimatrice pourra être représentée par l'expression

$$abi \sin^2 \alpha,$$

α étant la déviation du nicol; a le coefficient, indépendant de la longueur d'onde, par lequel il faut multiplier l'intensité du faisceau pour exprimer les modifications qu'il a éprouvées et les conditions de production du

---

([1]) *Sur la production de la sensation lumineuse* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVI, p. 1343).

([2]) *Annales de Chimie et de Physique*, 5e série, t. XXX.

champ (surface de la source lumineuse, distance de cette source à la fente, réflexions éprouvées sur le trajet, etc.); b un coefficient analogue, mais fonction de la longueur d'onde et relatif, par exemple, aux phénomènes d'absorption subie par le faisceau.

Désignons de même par i', a', b' les quantités analogues pour la source à étudier; la valeur du champ produit par elle sur la fente sera

$$a'b'i'.$$

Lorsque, par la variation de α, ces deux champs seront amenés à l'égalité, on aura

$$a'b'i' = abi\sin^2\alpha. \tag{1}$$

Or il est clair que cette égalité des champs entraînera l'égalité des deux plages lumineuses juxtaposées devant l'oculaire, et cela quelle que soit, d'ailleurs, la relation qui existe entre la sensation physiologique et l'intensité mécanique de la radiation considérée, quelles que soient aussi les réductions éprouvées par l'un des faisceaux, à l'intérieur du spectrophotomètre, pourvu que l'autre faisceau se présente dans les mêmes conditions que le premier pour subir ces mêmes réductions.

Il résulte de l'égalité (1) deux conséquences :

1° Pour une même radiation, d'intensité variable i', cette intensité sera mesurée par $\sin^2\alpha$, si l'on suppose que i est demeuré constant ou que, par une opération quelconque, on corrige la valeur de $\sin^2\alpha$ de cette variation :

$$i' = \frac{a}{a'}\,\frac{b}{b'}\sin^2\alpha \times i.$$

2° Il sera possible, par un état donné de la source à étudier, d'exprimer sa composition par rapport à celle de la lampe Carcel, en déterminant les valeurs de α qui amènent l'égalité dans les différentes régions du spectre. Mais, pour que les valeurs de i', ainsi déduites, soient rigoureusement proportionnelles à $i\sin^2\alpha$, il faut que les rapports $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$ restent constants lorsqu'on passe d'une radiation à l'autre. Le premier rapport étant, par définition, indépendant de la couleur, il suffit simplement que l'on ait

$$\frac{b}{b'} = \text{const.}$$

Supposons, par exemple, que les deux faisceaux traversent des épaisseurs

e, e' d'un même milieu avant de tomber sur l'appareil; les coefficients b et b' seront

$$K^e, \quad K^{e'},$$

K étant le coefficient de transmission correspondant à cette radiation. Si K_1 est le coefficient d'une autre radiation, les valeurs de b, b' seront

$$K_1^e, \quad K_1^{e'}.$$

Il faut donc que l'on ait

$$\frac{K^e}{K^{e'}} = \frac{K_1^e}{K_1^{e'}} = \ldots$$

ou bien

$$K^{e-e'} = K_1^{e-e'} = \ldots$$

ou enfin

$$(e - e') \log K = (e - e') \log K_1 = \ldots,$$

relation qui ne peut être vérifiée que par

$$K = K_1 = \ldots,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse d'une absorption variable avec les diverses radiations, ou par

$$e = e'.$$

Ainsi, pour que les valeurs de $\sin^2\alpha$ représentent les intensités des différentes radiations dans la lumière considérée en fonction des intensités de ces mêmes radiations dans la source type, il faut et il suffit que les épaisseurs des différents milieux traversés par les deux faisceaux, avant de tomber sur la fente, soient égales entre elles deux à deux. Nous verrons, à propos de cette comparaison des sources, comment on a satisfait à la condition précédente.

SECONDE PARTIE.

RÉSULTATS ET FORMULE. — ÉTUDE DES CONSTANTES DE LA FORMULE.

I. — Résultats et formules.

Tableaux des mesures.

Les Tableaux qui suivent indiquent les premiers résultats obtenus avec une lampe Maxim, dont la Table de graduation, établie au moyen de l'électromètre de M. Lippmann, a été donnée plus haut (p. 50). L'énergie électrique est donc fournie par une seule lecture, celle du galvanomètre dont on note le zéro à chaque observation. Un premier Tableau contient l'ordre des mesures, la position et le zéro du galvanomètre relatifs à une détermination : la différence de ces deux nombres donne la déviation. La quatrième colonne contient la valeur en ampères de l'intensité du courant, et la dernière la valeur en volt-ampères de l'énergie correspondante.

Un second Tableau contient les résultats des mesures photométriques. La première colonne reproduit l'ordre des observations, la seconde en donne l'heure. Dans la colonne suivante, on a porté, sous la rubrique *correction*, l'intervalle de temps θ, en secondes, des deux déclenchements de la lampe Carcel qui comprennent cette observation ([1]). En divisant par ce nombre la valeur de $\sin^2\alpha$, on affranchit la mesure des variations du carcel, c'est-à-dire que les intensités de la source à étudier se trouvent rapportées ainsi à un carcel idéal brûlant 5^{gr} d'huile à la seconde. La quatrième colonne contient l'un au-dessus de l'autre, et pour chaque expérience, la position moyenne et le zéro du nicol : la différence de ces nombres donne α qui est porté dans la colonne suivante. Enfin la colonne des intensités contient, comme intensités observées, les valeurs de $\frac{2\sin^2\alpha}{\theta}$ et, en regard, ces intensités calculées d'après une formule qui sera donnée plus loin et dont les constantes a, b, c sont données en tête du Tableau des mesures électriques.

([1]) Un petit Tableau additionnel donne la marche du carcel, c'est-à-dire l'heure de ces déclenchements successifs pour 5^{gr} d'huile consommés.

Expérience du 17 avril 1884.

Micromètre à 15,0, $\lambda = 0^{\mu},486$ (raie F),

$a = 0,08226$, $b = 2,93$, $c = 3,20$.

	Galvanomètre. Position.	Zéro.	Déviation.	Intensités en ampères.	Énergies en volt-ampères.
I..........	366,8	232,6	134,2	1,368	12,45
II.........	365,7	235,3	130,4	1,330	11,82
III.........	355,5	236,8	118,7	1,210	9,91
IV.........	347,0	236,9	110,1	1,123	8,67
V.........	339,4	236,8	102,6	1,046	7,55
VI.........	328,6	237,0	91,6	0,934	6,10

	Heure de l'observation.	Correction θ.	Nicol.	α.	Intensités lumineuses obs. $= \frac{2\sin^2\alpha}{\theta} \times 10^4$.	calculées.	Signe de la différence O.—C.
I.......	h m 12.24	411	° ′ 165.30 106. 0	° ′ 59.30	361,3	361,1	+
II......	37	413	156.45 106. 0	50.45	290,1	290,0	+
III......	51	410	137.35 106. 0	31.35	133,6	135,6	—
IV......	1. 0	412	129. 0 106. 0	23. 0	74,0	72,3	+
V.......	17	417	122.15 106. 0	16.15	37,4	37,8	—
VI......	33	419	115. 0 106. 0	9. 0	11,6	11,6	o

Marche du carcel.

h m s 12.20.10	h m s 12.54.23	h m 1.28.50
27. 1	1. 1.15	35.49
33.49	8. 6	42.47
40.42	15. 0	
47.33	21.57	

Expérience du 9 avril 1884.

Micromètre à 11,9, $\lambda = 0^{\mu},540$,

$a = 0,184$, $b = 3,09$, $c = 2,77$.

	Galvanomètre. Position.	Zéro.	Déviation.	Intensités en ampères.	Énergies en volt-ampères.
I..........	378,7	238,6	140,1	1,429	13,43
II.........	370,5	238,0	132,5	1,351	12,20
III.........	363,5	237,0	126,5	1,290	11,16
IV.........	351,3	236,3	115,0	1,173	9,39
V.........	344,9	235,7	109,2	1,113	8,53
VI.........	341,1	234,7	106,4	1,085	8,10
VII.........	336,0	233,8	102,2	1,042	7,50
VIII........	323,6	233,6	90,0	0,918	5,90

	Heure de l'observation.	Correction θ.	Nicol.	α.	Intensités lumineuses obs. $= \frac{2\sin^2\alpha}{\theta} \times 10^4$.	calculées.	Signe de la différence O.—C.
	h m		175°.40′	° ′			
I.......	11.35	446	106. 0	69.40	394,1	393,6	+
			156. 5				
II......	44	446	106. 0	50. 5	263,1	269,0	—
			146.45				
III......	58	444	106. 0	40.45	191,0	196,0	—
			134. 0				
IV......	12.11	443	106. 0	28. 0	100,2	99,0	+
			128.25				
V......	19	443	106. 0	22.25	65,9	65,9	0
			126. 5				
VI......	28	445	106. 0	20. 5	52,8	54,8	—
			123.15				
VII.....	36	444	106. 0	17.15	39,6	38,0	+
			115.10				
VIII....	42	444	106. 0	9.10	11,40	11,43	—

Marche du carcel

h m	h m s	h m s
11.30.24	12. 0. 7	12.29.43
37.50	7.31	37. 6
45.16	14.54	44.31
2.43	23.17	

Expérience du 8 avril 1884.

Micromètre à 10,0, $\lambda = 0^{\mu},5888$ (raie D).

$a = 0,284$, $b = 2,73$, $c = 2,56$.

	Galvanomètre.			Intensités en ampères.	Énergies en volt-ampères.
	Position.	Zéro.	Déviation.		
I..........	367,0	236,7	130,3	1,329	11,80
II..........	363,5	237,1	126,4	1,289	11,10
III..........	359,2	237,9	121,3	1,237	10,30
IV..........	353,7	239,0	114,7	1,169	9,30
V..........	348,1	239,2	108,9	1,110	8,45
VI..........	345,8	239,4	106,4	1,085	8,10
VII..........	341,5	240,0	101,5	1,035	7,40
VIII..........	330,0	240,1	89,9	0,917	5,90
IX..........	326,2	240,2	86,0	0,877	5,47
X..........	324,3	240,3	84,0	0,856	5,21
XI..........	320,8	240,3	80,5	0,821	4,83
Expérience complémentaire.					
XII..........	378,8	240,3	138,5	1,412	13,20

	Heure de l'observation.	Correction θ.	Nicol.	α.	Intensités lumineuses obs. $= \frac{2 \sin^2 \alpha}{\theta} \times 10^5$.	Intensités lumineuses calculées.	Signe de la différence O.—C.
I.......	6h32m	419	153°30′ 106. 0	47°30′	259,6	258,0	+
II.......	37	418	148. 0 106. 0	42.10	215,5	216,5	—
III.......	46	416	142. 0 106. 0	36. 0	166,0	166,0	0
IV.......	56	412	135. 0 106. 0	29. 0	114,0	115,0	—
V.......	7. 3	414	130.20 106. 0	24.20	81,6	80,4	+
VI.......	10	415	128.10 106. 0	22.10	68,4	69,3	—
VII.......	17	416	125.10 106. 0	19.10	51,6(?)	48,8	—
VIII.......	26	416	117.10 106. 0	11.10	18,0	18,0	0
IX.......	32	418	115. 5 106. 0	9. 5	11,9	12,1	—
X.......	37	418	113.50 106. 0	7.50	8,9	9,4	—
XI.......	47	418	112.35 106. 0	6.35	6,2	6,1	+
Expérience complémentaire.							
XII.......	58	420	168.30 106. 0	62.30	374,7	374,7	0

Marche du carcel.

6h25m33	7h0m12s	7h34m51s
32.32	7. 6	41.49
39.30	14. 1	48.47
46.26	20.57	55.47
53.20	27.53	8. 2.47

Expérience du 21 avril 1884.

Micromètre à 7,35, $\lambda = 0^{\mu},700$.

$a = 1,853$, $b = 2,89$, $c = 2,08$.

	Galvanomètre. Position.	Zéro.	Déviation.	Intensités en ampères.	Énergies en volt-ampères.
I..........	399,5	242,3	157,2	1,60	16,53
II..........	390,2	243,0	147,2	1,50	14,70
III..........	374,0	243,9	130,1	1,327	11,77
IV..........	362,8 362,4	245,0	117,6	1,200	9,80
V..........	348,7	246,1	102,6	1,046	7,56
VI..........	343,7	246,6	97,1	0,990	6,82

	Heure de l'observation.	Correction θ.	Nicol.	α.	Intensités lumineuses obs. $= \frac{2\sin^2\alpha}{\theta} \times 10^5$.		calculées.	Signe de la différence O.—C.
I.......	12^h. 9^m	390	175°.20′ 106. 0	69°.20′		448,7	438,6	+
II.......	15	392	158. 0 106. 0	52. 0		316,8	318,9	—
III.......	35	395	142. 0 106. 0	36. 0		174.9	171,0	+
IV.......	50	391	132.30 106. 0	26.30		101,7	105,5	—
	1. 2	396	143.35 106. 0	37,35	187,8	101,7		
V.......	10	397	130.40 106. 0	24.40	87,6	47,4	46,7	+
VI.......	24	400	126.35 106. 0	20.35	61,7	33,5	33,0	+

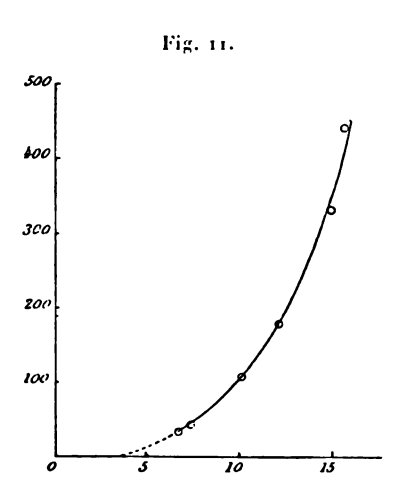
Marche du carcel.

12^h. 6^m.41^s	12^h.39^m.22^s	1^h.12^m.13^s
13.11	45.55	18.49
19.43	52.26	25.29
26.16	59. 0	
32.47	1. 5.36	

Représentation graphique.

Les résultats précédents ont été traduits en courbes ayant pour abscisses les énergies et pour ordonnées les intensités lumineuses. Nous donnons ici (*fig.* 11) la courbe correspondant au dernier Tableau ($\lambda = 0^\mu, 700$), non

Fig. 11.



pas à cause de la régularité des observations, qui laisse toujours à désirer dans ces régions extrêmes du spectre, mais parce qu'elle suit le phénomène jusqu'aux énergies élevées. Pour obtenir une aussi longue course, on a dû, pour les fortes intensités du courant, réduire, au moyen d'un second nicol, l'intensité du faisceau venu de la lampe Maxim. Aux faibles énergies, ce nicol était ramené parallèlement à la section de l'autre, et il suffisait d'une expérience de raccord (n° IV du Tableau) pour rendre ces deux périodes comparables.

Calcul des résultats. Choix d'une formule.

On a essayé de traduire ces courbes en formules, afin de mettre en évidence ce qui, dans chacune d'elles, peut caractériser la radiation dont elle représente la marche. On voit d'abord, par l'exemple précédent, que, à mesure que l'énergie diminue, ces courbes se rapprochent de plus en plus de l'axe des abscisses, sans que l'expérience nous permette de dire si elles le rencontrent avant l'origine des énergies ou à cette origine même.

Dans le premier cas, il y aurait une énergie pour laquelle la radiation

considérée prendrait naissance; dans le second cas, la radiation existerait aux températures les plus basses et ne deviendrait appréciable à nos moyens d'observation que lorsque, l'énergie croissant constamment, elle finirait par acquérir une intensité suffisante. C'est à cette dernière hypothèse que s'arrête de la Provostaye (¹), la considérant « comme plus susceptible d'être soumise à quelques vérifications expérimentales ». C'est aussi conformément à cette manière de voir qu'a été établie la formule de M. Violle $r = m\mathrm{T}b^{\mathrm{T}^2}a^{\mathrm{T}}$; mais ces deux savants se sont bien gardés d'appuyer sur un raisonnement un simple choix fait entre deux hypothèses *a priori* aussi admissibles l'une que l'autre. C'est cependant ce qui a été fait par certains auteurs (²), au moyen d'une application inexacte de la loi des pouvoirs émissif et absorbant. De ce fait évident que les corps, à basse température, sont capables d'absorber des rayons de toute réfrangibilité, on a cru pouvoir conclure qu'ils étaient également capables de les émettre dans les mêmes conditions. Mais, de même que le pouvoir absorbant A d'un corps, à une certaine température et pour une certaine longueur d'onde, n'est qu'un nombre ou l'expression du rapport de deux quantités, de même le pouvoir émissif du même corps, dans ces conditions de température et de longueur d'onde, n'est que le rapport $\frac{\mathrm{E}}{e}$ des intensités de cette même radiation émise par le corps et par le noir de fumée. On a donc

$$\frac{\mathrm{E}}{e} = \mathrm{A};$$

c'est dans ce sens que la loi a été affirmée expérimentalement par de la Provostaye et Desains pour les faisceaux de chaleur obscure; c'est ainsi qu'elle a été étendue par M. Kirchhoff aux radiations simples de toute réfrangibilité. A peut donc avoir une valeur finie, bien que E soit nul : il suffit que e soit également nul, c'est-à-dire qu'à la température considérée le noir de fumée et, par suite, tous les corps soient incapables d'émettre la radiation dont il s'agit. Il résulte de là cette conséquence que tous les corps commencent à émettre une radiation déterminée à la même température. C'est, d'ailleurs, l'opinion de M. Kirchhoff (³), et M. E. Becquerel l'a

(¹) *Considérations théoriques sur la chaleur rayonnante* (*Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. LXVII, p. 37).

(²) Lecher, *Wiedemann's Annalen*. Bd. XVII, p. 495.

(³) *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. LXII, p. 179.

adoptée dans le travail précédemment cité, en supposant, pour la température θ d'émission des rayons rouges la valeur de 500°. On n'a pas cru devoir faire ici une hypothèse différente ; seulement, on a regardé comme indéterminée l'énergie pour laquelle une radiation prend naissance, laissant au calcul de décider si cette constante est nulle ou si elle possède une valeur particulière à chaque radiation et que les expériences pourront fixer, du moins approximativement.

En ce qui concerne la portion de la courbe relative aux fortes énergies, on voit que, même pour des longueurs d'onde voisines de la raie A et pour les plus vives incandescences de la lampe, elle ne paraît pas s'approcher d'un maximum que de la Provostaye ([1]), parmi les hypothèses qu'il émet sur le développement des radiations, envisage comme possible, sans s'y arrêter d'ailleurs. D'un autre côté, ces courbes ne paraissent asymptotes à aucune direction et la forme exponentielle ne semble pas leur convenir. Il n'y a pas à s'en étonner, du reste : en admettant comme exacte la formule de M. Violle, $r = m\mathrm{T}\,b^{\mathrm{T}^2}a^{\mathrm{T}}$, et en se rappelant que, d'après la loi de Stefan et surtout d'après celle de Dulong et Petit, l'énergie rayonnée croît rapidement avec la température, on voit qu'une exponentielle de la forme de celle de M. Violle, où la variable serait l'énergie, croîtrait avec une rapidité que l'inspection des courbes n'indique pas. Celles-ci, par contre, semblent se rapprocher de la forme parabolique, et c'est en vertu de ces considérations que l'on a essayé de les représenter par la formule

$$y = a(x - b)^c,$$

dans laquelle y est l'intensité lumineuse et x l'énergie rayonnée. Les quantités a, b, c sont des fonctions de la longueur d'onde que l'expérience devra déterminer. En particulier, b est l'énergie du rayonnement au moment où naît la radiation considérée ; et, à moins d'être nulle identiquement, elle dépendra des conditions de la lampe. Au contraire, c doit être un coefficient propre à chaque longueur d'onde et indépendant de la lampe sur laquelle on opère.

Le calcul des trois constantes a, b, c, pour une radiation donnée λ, se faisait de la manière suivante : soient trois points $\mathrm{M}(x, y)$, $\mathrm{M}'(x', y')$, $\mathrm{M}''(x'', y'')$ de la courbe, tels que $x < x' < x''$; on a le système d'équa-

([1]) *Loc. cit.*

tions

(1)
$$\begin{cases} y = a(x - b)^c, \\ y' = a(x' - b)^c, \\ y'' = a(x'' - b)^c; \end{cases}$$

on en tire

(2)
$$\begin{cases} \left(\dfrac{y}{y'}\right)^{\frac{1}{c}} = \dfrac{x - b}{x' - b} = \alpha, \\ \left(\dfrac{y}{y''}\right)^{\frac{1}{c}} = \dfrac{x - b}{x'' - b} = \beta, \end{cases}$$

avec la relation

(3)
$$\frac{\log \beta}{\log \alpha} = \frac{\log \dfrac{y}{y''}}{\log \dfrac{y}{y'}} = \mu,$$

d'où

(4)
$$\beta = \alpha^{\mu}.$$

Des relations (2) on déduit

(5)
$$\begin{cases} \dfrac{x - b}{x' - x} = \dfrac{\alpha}{1 - \alpha}, \\ \dfrac{x - b}{x'' - x} = \dfrac{\beta}{1 - \beta} \end{cases}$$

et enfin

(6)
$$\frac{\alpha(1 - \beta)}{\beta(1 - \alpha)} = \frac{x'' - x}{x' - x} = \rho,$$

avec la condition $\rho > 1$.

En éliminant β entre cette équation et l'équation (4), on a

(7)
$$\frac{\alpha(1 - \alpha^{\mu})}{\alpha^{\mu}(1 - \alpha)} = \rho,$$

expression dans laquelle, ρ et μ étant donnés, on obtiendra la valeur de α.

On voit déjà que l'équation admet la solution $\alpha = 0$, qui est inadmissible, puisqu'elle supposerait $y = 0$ avec $y' \gtrless 0$. En supprimant cette solution, l'équation devient

(8)
$$(\rho - 1)\alpha^{\mu} - \rho\alpha^{\mu - 1} + 1 = 0.$$

Puisque l'on a $\rho > 1$, les coefficients sont positifs; le premier membre

présente donc deux variations, et par suite, quel que soit μ (Laguerre), le nombre des racines positives est au plus égal à deux. Or, la valeur $\alpha = 1$, qui satisfait à l'équation, ne peut être admise si $y \gtrless y'$, comme nous l'avons supposé. Il ne reste donc qu'une seule racine positive, laquelle conviendra au problème et doit être inférieure à 1, d'après l'équation (2).

L'équation (8) ne peut être résolue par rapport à α que par approximations successives, tant que μ est un nombre quelconque, entier ou fractionnaire ; mais il est possible de disposer de μ, de façon à pouvoir écrire immédiatement l'expression de la solution cherchée.

Soit d'abord $\mu = 2$; l'équation (8) devient

$$(\rho - 1)\alpha^2 - \rho\alpha + 1 = 0$$

ou, en supprimant $\alpha - 1 = 0$,

$$\text{(A)} \qquad \alpha = \frac{1}{\rho - 1}.$$

La condition $\mu = 2$ équivaut d'ailleurs à la suivante :

$$\log\frac{y}{y''} = 2\log\frac{y}{y'},$$

$$y'^2 = yy''.$$

Les points $M(x, y)$, $M''(x'', y'')$ ayant été pris aux deux extrémités de la courbe supposée construite, l'ordonnée du point moyen M' s'en déduira par la relation précédente, et la courbe donnera l'abscisse x' correspondante : on connaîtra ainsi la valeur de ρ et, par suite, celle de α qui, par la première des équations (2), donnera l'exposant c.

Ce mode de calcul a dû être abandonné ; le point M' que l'on obtient ainsi par une moyenne proportionnelle est, en général, trop rapproché du point M pour bien déterminer la courbe. D'un autre côté, il est clair que des valeurs de μ supérieures à 2 ne feraient que rapprocher M' de M. En effet, la formule (3) montre que, μ allant en croissant de 1 à ∞, le point M va de M'' en M. Il faut donc donner à μ des valeurs comprises entre 1 et 2, c'est-à-dire des valeurs fractionnaires.

Prenons $\mu = \frac{3}{2}$; l'équation (8) devient

$$(\rho - 1)\alpha^{\frac{3}{2}} - \rho\alpha^{\frac{1}{2}} + 1 = 0.$$

En posant $z^2 = \alpha$, on a

$$(\rho - 1)z^3 - \rho z + 1 = 0;$$

supprimant la solution $z - 1 = 0$ et résolvant,

$$(\rho - 1)z^2 + (\rho - 1)z - 1 = 0,$$

(B) $$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{\rho - 1}}}{2}.$$

Le signe — ne convient pas au problème, puisqu'il donnerait une valeur de z plus grande que 1 en valeur absolue et, par suite, $\alpha > 1$, contrairement à (2). Cette relation $\mu = \frac{3}{2}$ entraîne la condition suivante, à laquelle doivent satisfaire les trois ordonnées :

$$\log \frac{y}{y''} = \frac{3}{2} \log \frac{y}{y'},$$

$$\log y - \log y'' = \frac{3}{2} \log y - \frac{3}{2} \log y',$$

$$\log y' = \frac{1}{3}(\log y + 2 \log y'').$$

Ayant donc pris, comme tout à l'heure, les points M, M″ aux deux extrémités de la courbe, on calculera y' par cette relation ; la courbe donnera x'. Par là, on connaît ρ, puis z, et la première des équations (2) donne alors

$$c = \frac{\log y - \log y'}{2 \log z}.$$

En posant $x'' - x' = d'$, $x' - x = d$, l'équation (B) peut s'écrire

(B′) $$z = \frac{\sqrt{1 + 4\frac{d}{d'}} - 1}{2}.$$

Les équations (B) donneront $2 \log z$, d'où l'on déduit z^2 et par suite b, d'après la première des équations (5)

$$b = x - d \frac{z^2}{1 - z^2},$$

ou, si l'on veut supposer calculé l'exposant c, on déduira de l'équation (2) la valeur de α

$$\left(\frac{y}{y'}\right)^{\frac{1}{c}} = \alpha,$$

qu'on portera ensuite dans l'expression précédente de b, écrite ainsi :

$$b = \frac{x - \alpha x'}{1 - \alpha}.$$

Pour calculer enfin a, on fait, pour tous les points donnés par l'expérience, la différence

$$\log y - \log (x - b)^c = \log a,$$

et l'on prend la moyenne des valeurs ainsi trouvées pour $\log a$ et supposées peu différentes.

C'est par ce moyen qu'ont été calculés les coefficients a, b, c inscrits en tête des Tableaux précédents. On voit, par la courbe (*fig.* 11) et malgré les causes d'incertitude signalées plus haut, que la forme parabolique, d'après laquelle cette courbe a été tracée, semble devoir représenter très fidèlement l'intensité mécanique d'une radiation en fonction de l'énergie du flux total. C'est ici le moment de rappeler que M. E. Becquerel avait été conduit à une expression analogue et qui, pour les rayons transmis par le verre rouge, serait la suivante :

$$I = B(M - m)^3.$$

Dans cette formule, M. E. Becquerel supposait déterminée la valeur de m. Les expériences n'ayant porté, d'ailleurs, que sur ces radiations rouges, on ne peut rien en déduire relativement à la variation de l'exposant avec la longueur d'onde. Néanmoins on remarquera que la valeur de cet exposant est notablement supérieure à la valeur 2,15 que les expériences actuelles, ainsi que nous le verrons plus loin, tendent à attribuer aux radiations moyennes ($0^{\mu},670$) que transmet le verre rouge. Les verres colorés, cependant, quelque insuffisants qu'ils soient pour séparer les radiations, ne peuvent être la cause unique de cette divergence. Ne peut-on en trouver la raison dans la nature différente des deux corps incandescents, à savoir un fil de platine dans les expériences de M. E. Becquerel et un filament de charbon dans les circonstances actuelles ? En se reportant aux résultats expérimentaux relatifs à la loi de Stefan, n'est-il pas permis de penser qu'ici encore le pouvoir émissif du platine pour les radiations rouges a été en augmentant avec la température, tandis que le pouvoir émissif du filament de charbon est resté sensiblement le même que celui du noir de fumée dans les mêmes conditions ? Ces considérations suffiraient à justifier l'emploi que l'on a cru devoir faire ici du charbon des lampes à incandescence, de préférence aux métaux, et malgré la légère incertitude qui subsiste à l'endroit de la construc-

tion de ces lampes. C'est, du reste, pour dégager la valeur de c de ces incertitudes que de nouvelles expériences ont été faites sur une seconde lampe, d'un type tout différent. C'est une lampe Swan dont il a déjà été question précédemment (p. 51). Les Tableaux qui suivent donnent les résultats relatifs à des radiations à peu près régulièrement espacées dans toute l'étendue du spectre ; sauf dans la partie jaune où, pour des raisons qui seront indiquées plus loin, on a effectué quelques déterminations sur une longueur d'onde ($0^{\mu},595$) voisine de celle du sodium.

La position d'extinction du nicol ayant toujours été réglée à zéro, il a été inutile de reproduire dans les Tableaux cette position zéro, et la position du nicol donne la valeur de α. En outre, comme, dans ces déterminations faites avec l'électromètre Thomson, on faisait, de temps en temps, des mesures directes de la différence de potentiel, sans se reporter à la courbe des énergies, on a cru bon d'indiquer cette opération, en ajoutant au Tableau des mesures électriques une colonne donnant les différences de potentiel aux bornes de la lampe, exprimées en volts.

Expérience du 1er mai 1885.

Micromètre à 7,20, $\lambda = 0^{\mu},709$ (près de A),

$a = 0,3503$, $b = 1,417$, $c = 2,03$.

	Galvanomètre.			Intensités du courant en ampères.	Différence de potentiel en volts.	Énergies en volts-ampères.
	Zéro.	Position.	Déviation.			
I.......	255,0	80,0	175,0	1,785	12,00	21,35
II......	255,0	85,3	169,7	1,731	11,41	19,76
III......	255,0	97,3	157,7	1,608	10,44	16,80
IV......	»	107,3	147,7	1,506	9,73	14,66
V......	255,1	118,8	136,3	1,390	8,97	12,47
VI......	255,4	130,5	124,9	1,274	8,17	10,42
VII.....	255,4	140,9	114,5	1,168	7,52	8,78

	Heure de l'observation.	Correction θ.	Nicol α.	Intensités lumineuses Obs. $= \frac{2\sin^2\alpha}{3\theta} \times 10^5$.	Calculées.	Signe de la différence O. — C.
I........	5h 50m	408	61°40′	126,5	125,0	+
II.......	58	408	52.30	102,8	105,6	—
III.......	6. 6	408	44.30	80,2	74,0	—
IV.......	11	408	35.30	55,1	54,5	+
V.......	22	409	30.15	41,3	38,0	+
VI.......	30	412	22.20	23,4	24,9	-
VII......	38	412	18.45	16,6	16,5	+

Marche du carcel.

5h 46m 48s	»	6h 27m 38s
»	6h 14m 0s	»
6. 0.24	»	41.22

Expérience du 30 avril 1885.

Micromètre à 7,57. $\lambda = 0^{\mu},686$ (raie B).

$a = 0,2511$, $b = 2,01$, $c = 2,12$.

	Galvanomètre.			Intensités du courant en ampères.	Différence de potentiel en volts.	Energies en volts-ampères.
	Zéro.	Position.	Déviation.			
I.......	256,8	88,4	168,4	1,717	11,31	19,43
II.......	257,0	90,6	166,4	1,697	11,18	18,98
III......	257,7	102,7	155,0	1,581	10,24	16,20
IV......	257,8	112,1	145,7	1,486	9,64	14,27
V......	257,7	122,2	135,5	1,382	8,92	12,33
VI......	257,8	132,0	125,8	1,283	8,25	10,59
VII.....	257,7	142,2	115,5	1,178	7,56	8,90
VIII....	257,8	154,6	103,2	1,052	6,74	7.10

	Heure de l'observation.	Correction θ.	Nicol α.	Intensités lumineuses Obs. $= \frac{2\sin^2\alpha}{3\theta} \times 10^4$.	Calculées.	Signe de la différence O. — C.
I........	4h29m	409	54°30′	107,9	107,7	—
II.......	38	409	51.30	99,8	100,5	—
III.......	48	409	40.50	69,6	69,7	—
IV.......	56	409	34.15	51,6	51,1	—
V.......	5. 1	409	27.50	35,4	35,5	—
VI.......	8	409	22.50	24,5	24,0	+
VII......	14	409	17.40	15,0	15,09	—
VIII.....	24	409	12.45	7,99	7,93	+

Marche du carcel.

4h21m30s	4h48m46s	5h16m2s
»	»	»
35. 8	5. 2.24	29.40
»	»	

Expérience du 6 avril 1885.

Micromètre à 8,67, $\lambda = 0^{\mu},635$,

$a = 0,1789$, $b = 1,71$, $c = 2,30$.

	Galvanomètre.			Intensités du courant en ampères.	Différence de potentiel en volts.	Énergies en volts-ampères.
	Zéro.	Position.	Déviation.			
I.......	249,9	85,8	164,1	1,673	11,01	18,42
II......	250,2	94,6	155,6	1,587	10,30	16,34
III......	250,3	103,5	146,8	1,497	9,68	14,49
IV......	250,5	126,7	123,8	1,262	8,11	10,23
V......	250,7	139,8	110,9	1,131	7,28	8,23
VI......	251,1	152,6	98,5	1,004	6,44	6,46
VII.....	251,6	162,5	89,1	0,908	5,87	5,33
VIII....	252,0	173,8	78,2	0,797	5,20	4,14

	Heure de l'observation.	Correction θ.	Nicol α.	Intensités lumineuses Obs. $= \frac{2\sin^2\alpha}{3} \times 10^4$.	Intensités lumineuses Calculées.	Signe de la différence O. — C.
I........	$7^h.43^m$	420	$59°.15'$	117,2	116,8	+
II.......	50	419	47.15	85,7	86,0	—
III.......	8. 2	420	38.45	62,2	63,0	—
IV.......	17	423	23.20	24,7	24,7	0
V.......	25	422	17.20	13,9	13,4	+
VI.......	32	422	11.20	6,1	6,5	—
VII......	39	421	8.25	3,4	3,4	0
VIII.....	46	422	5.25	1,4	1,4	0

Marche du carcel.

$7^h.38^m.47^s$	$8^h.\ 6^m.48$	$8^h.34^m.54^s$
45.47	13.47	41.53
52.46	20.50	48.57
59.46	27.52	

Expérience du 30 mai 1885.

Micromètre à 9,80, $\lambda = 0^{\mu},595$,

$a = 0,1516$, $b = 2,00$, $c = 2,48$.

	Galvanomètre.			Intensités du courant en ampères.	Différence de potentiel en volts.	Énergies en volts-ampères.
	Zéro.	Position.	Déviation.			
I.......	255,7	93,8	161,9	1,651	10,75	17,73
II......	255,7	98,1	157,6	1,607	10,44	16,78
III......	256,0	116,3	139,7	1,425	9,19	13,10
IV......	256,0	132,2	132,2	1,348	8,70	11,73
V......	257,3	167,4	89,9	0,917	5,85	5,37

	Heure de l'observation.	Correction θ.	Nicol α.	Intensités lumineuses		Signe de la différence O. — C.
				Obs. = $\frac{2\sin^2\alpha}{3\theta} \times 10^5$.	Calculées.	
I........	11h.58m	400	68°.30′	144,2	141,6	+
II.......	12.15	396	57.30	119,7	121,2	—
III.......	43	395	35.30	56,9	59,5	—
IV.......	57	394	30.45	44,1	43,0	+
V.......	1.20	394	7.45	3,09	3,09	0

Marche du carcel.

11h.53m.5	»	12h.59m.4s
»	12h32m48s	»
12. 6.25	»	1.12.13
»	45.57	»
19.37	»	25.18

Expérience du 24 avril 1885.

Micromètre à 10, $\lambda = 0^{\mu},5888$ (raie D),

$a = 0,1104$, $b = 1,918$, $c = 2,54$.

	Galvanomètre. Zéro.	Galvanomètre. Position.	Galvanomètre. Déviation.	Intensités du courant en ampères.	Différence de potentiel en volts.	Énergies en volts-ampères.
I.......	262,4	104,3	158,1	1,612	10,48	16,91
II......	262,8	121,2	141,6	1,441	9,33	13,49
III.....	262,5	139,0	123,5	1,260	8,08	10,18
IV......	263,0	154,3	108,7	1,108	7,12	7,89
V......	263,5	165,4	98,1	1,000	6,41	6,41
VI......	263,6	180,8	82,8	0,844	5,42	4,57
VII.....	264,0	190,7	73,3	0,747	4,89	3,66

	Heure de l'observation.	Correction θ.	Nicol α.	Intensités lumineuses Obs. $= \frac{2\sin^2\alpha}{3\theta} \times 10^6$.	Intensités lumineuses Calculées.	Signe de la différence O. — C.
I........	12h.55m	411	55°. 0′	108,0	107,5	+
II.......	1. 2	410	35.40	55,2	55,7	—
III......	7	411	22.30	23,7	23,7	0
IV.......	16	411	14.30	10,2	10,4	—
V.......	26	411	10.15	5,1	5,06	+
VI.......	32	413	5.25	1,45	1,33	+
VII......	39	414	3. 5	0,46	0,46	0

Marche du carcel.

12h.52m.57s	12h.13m.29s	12h.34m. 4s
59.48	20.20	40.58
6.38	27.11	

Expérience du 23 mai 1885.

Micromètre à 12,56, $\lambda = 0^{\mu},526$ (raie E).

$a = 0,0651$, $b = 2,12$, $c = 2,87$.

	Galvanomètre.			Intensités du courant en ampères.	Différence de potentiel en volts.	Énergies en volts-ampères.
	Zéro.	Position.	Déviation.			
I.......	257,3	100,0	157,3	1,604	10,43	16,73
II......	257,4	104,3	153,1	1,561	10,12	15,80
III......	257,5	107,0	150,5	1,535	9,97	15,31
IV......	258,8	115,3	143,5	1,463	9,49	13,88
V......	261,8	137,8	124,0	1,264	8,13	10,29
VI......	261,5	175,2	86,3	0,880	5,68	5,00

	Heure de l'observation.	Correction θ.	Nicol α.	Intensités lumineuses		Signe de la différence O. — C.
				Obs. $-\dfrac{2\sin^2\alpha}{3\theta}\times 10^5$.	Calculées.	
I........	$4^h 20^m$	408	$70^\circ 15'$	144,6	144,1	+
II.......	31	404	57.50	118,2	119,0	—
III.......	37	404	53.30	106,6	106,9	—
IV.......	43	404	43.30	78,1	77,2	+
V.......	55	404	24. 0	27,2	27,1	—
VI.......	5.15	402	5.10	1,35	1,36	—

Marche du carcel.

$4^h 16^m 35^s$	$4^h 43^m 18^s$	$4^h 10^m 30^s$
»	»	17.10
30.10	57. 6	
»	»	

Expérience du 5 juillet 1885.

Micromètre à 15,0, $\lambda = 0^{\mu},486$ (raie F).

$a = 0,02275$, $b = 2,38$, $c = 3,15$.

	Galvanomètre.			Intensités du courant en ampères.	Différence de potentiel en volts.	Énergies en volts-ampères.
	Zéro.	Position.	Déviation.			
I.......	245,0	84,7	160,3	1,635	10,64	»
II......	245,1	87,0	158,1	1,612	10,48	»
III......	244,8	92,7	152,1	1,551	10,09	»
IV......	245,8	112,0	133,8	1,364	8,78	»
V......	245,8	122,0	123,8	1,262	8,10	»
VI......	247,2	134,0	113,2	1,154	7,42	»
VII.....	247,5	145,4	102,1	1,041	6,68	»
VIII....	247,3	154,3	93,0	0,948	6,06	»

	Heure de l'observation.	Correction θ.	Nicol α.	Intensités lumineuses		Signe de la différence O. — C.
				Obs. $= \frac{2\sin^2\alpha}{3\theta} \times 10^4$.	Calculées.	
I........	7^{h}50^m	401	58°40′	121,2	116,5	+
II........	8. 0	401	52. 0	103,2	105,0	—
III........	22	400	43. 0	77,5	78,8	—
IV........	45	401	24.40	28,9	28,4	+
V........	52	401	17.10	14,4	15,0	—
VI........	9. 0	402	12.20	7,53	7,11	+
VII......	7	402	7. 0	2,46	2,70	—
VIII.....	12	401	4.40	1,10	1,06	+

Marche du carcel.

7^{h}47^{m}53^s	»	8^{h}54^{m}3^s
»	8^{h}27^{m}55^s	»
8. 1.15	»	9. 8. 1
»	14.16	14.41
14.35	»	21.22

II. — Étude des constantes de la formule.

En jetant un coup d'œil sur ces Tableaux aussi bien que sur ceux qui correspondent à la lampe Maxim, on voit immédiatement que la valeur de c va en augmentant et d'une façon régulière, à mesure que la longueur d'onde diminue, depuis $c = 2,03$ (lampe Swan) pour $\lambda = 0^{\mu},709$ jusqu'à $c = 3,20$ (lampe Maxim) pour $\lambda = 0^{\mu},486$, et que ces valeurs paraissent indépendantes, du moins comme ordre de grandeur, de la lampe qui les a fournies. Il n'en est pas de même de b, dont les valeurs, du reste, ne sont comparables entre elles que pour une lampe déterminée. D'après l'idée que nous nous sommes faite de l'apparition successive des radiations, cette valeur de b devrait croître avec la réfrangibilité; or, s'il est vrai que, pour la lampe Swan, les valeurs extrêmes $b = 1,41$, $b = 2,38$ satisfont à cette relation, il n'en est pas de même des valeurs intermédiaires qui semblent, jusqu'à un certain point, varier indépendamment de la longueur d'onde. Évidemment il n'en est rien, et tout porte à croire que, puisque ces quantités ne sont pas nulles, elles suivent l'ordre des réfrangibilités, et qu'une marche expérimentale, dirigée dans ce sens, mettrait en évidence leur succession régulière; ce point exigerait à lui seul une étude spéciale. Le seul but que l'on se proposait d'atteindre ici était de déterminer, avec le plus d'exactitude possible, l'élément qui, dans cette expression de l'intensité, caractérise spécialement la radiation, à savoir l'exposant c et, pour cela, on a dû sacrifier les observations aux basses énergies qui seraient surtout efficaces dans la détermination de b, afin de pouvoir étendre l'observation jusqu'aux énergies élevées où l'influence de c devient prédominante. Quant à la valeur de a, elle dépend aussi de λ, mais d'une manière qui ne peut être mise en évidence par nos déterminations actuelles. Il est clair, en effet, que ces valeurs de a n'ont aucun lien entre elles lorsqu'on passe d'une radiation à une autre; elles n'en ont même pas d'une expérience à l'autre, pour une même radiation, puisqu'elles dépendent de la distance des sources à la fente du spectrophotomètre et, en outre, de la portion de la flamme du carcel visée par le nicol.

Variation de c avec la longueur d'onde.

On se rappelle que M. Becquerel, à propos de la formule du rayonnement simple en fonction de la température

$$r = a(e^{b(T-\theta)} - 1),$$

établie par lui pour trois groupes de radiations transmises par des verres rouge, vert et bleu, a donné, comme relation probable entre les bases des exponentielles et la longueur d'onde, l'équation suivante :

$$b\lambda = \text{const.},$$

qui se rapporte au Tableau ci-dessous :

Teinte des rayons qui traversent les verres colorés.	Valeur de b.	Longueur d'onde λ.	Produit $b\lambda$.
Rouges................	0,00461	670	3,089
Verts......	0,00543	526	2,856
Bleus.................	0,00657	460	3,022

Est-il possible de formuler ici une relation analogue? Le Tableau suivant, qui se rapporte à toutes les valeurs de c, obtenues soit par la lampe Maxim, soit par la lampe Swan, donne à ce point de vue les valeurs de trois fonctions

$$c\lambda, \quad \lambda \log c, \quad (c-1)\lambda^2.$$

Longueur d'onde λ.	Valeur de c.	$c\lambda$.	$\lambda \log c$.	$(c-1)\lambda^2$.
$\overset{\mu}{0},709$......	2,03 (Swan)	1,439	0,218	0,517
700......	2,08 (Maxim)	1,456	0,222	0,529
686......	2,12 (Swan)	1,455	0,223	0,527
635......	2,30 »	1,460	0,229	0,524
595......	2,48 »	1,475	0,234	0,524
5888.....	2,54 »	1,493	0,237	0,532
	2,56 (Maxim)	1,507	0,240	0,536
540......	2,77 »	1,495	0,238	0,516
526.. ...	2,87 (Swan)	1,509	0,241	0,517
486......	3,15 »	1,530	0,242	0,508
	3,20 (Maxim)	1,552	0,245	0,520

Ainsi, la fonction $c\lambda$ va en croissant du rouge au violet; on verrait facilement que $c\lambda^n$, pour n entier et supérieur à 1, va en décroissant; $\lambda \log c$, qui est la fonction analogue de celle de M. Becquerel, ne convient pas davantage. Quant à la fonction $(c-1)\lambda^2$, on voit qu'elle ne suit aucune marche

régulière et qu'à l'exception de la valeur 0,508 donnée par une courbe, d'ailleurs assez défectueuse, l'écart de part et d'autre de la valeur moyenne 0,522 n'est pas très considérable. Il est à remarquer, toutefois, que la radiation $0^{\mu},5888$ du sodium accuse pour c une valeur trop grande. Ce fait s'est reproduit dans presque toutes les déterminations relatives à cette radiation et c'est pour ce motif qu'on a opéré sur la longueur d'onde $0^{\mu},595$, voisine de la précédente. On voit donc que, malgré les divergences que présentent encore entre eux les nombres de la dernière colonne, on est autorisé à admettre que l'exposant c de la formule

$$y = a(x - b)^c$$

est lié à la longueur d'onde d'une radiation du spectre lumineux par la relation

$$c = 1 + \frac{\mu}{\lambda^2},$$

où $\mu = 0,522$ lorsque λ est exprimé en millièmes de millimètre.

Détermination de b.

Ainsi qu'on l'a dit précédemment, on ne peut compter sur les déterminations actuelles pour fixer la loi de variation de b avec λ; l'œil, en effet, qui estime avec tant de sûreté l'égalité d'intensité de deux plages lumineuses juxtaposées, est tout à fait impuissant à donner la valeur absolue d'un champ éclairé. Une pile thermo-électrique d'une grande sensibilité conviendrait mieux pour une telle étude. Quoi qu'il en soit, en admettant, pour les quelques applications qui vont suivre, la formule d'interpolation suivante

$$b = \frac{K}{\lambda} \qquad \text{avec} \qquad K = 1,12,$$

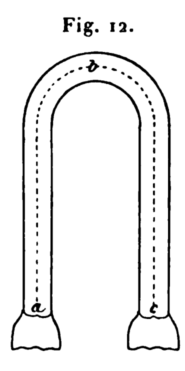
qui satisfait aux valeurs

$$\lambda_1 = 0,486,$$
$$\lambda_2 = 0,635$$

et ne s'éloigne pas trop de quelques-unes des valeurs intermédiaires, nous ne commettrons pas une erreur considérable, d'autant que, aux fortes énergies, l'influence de b est assez atténuée pour que ses valeurs, obtenues par la formule précédente, puissent être considérées comme suffisamment exactes. Ce coefficient b peut, d'ailleurs, être défini, indépendamment de la lampe à in-

candescence, comme la quantité de chaleur émise dans l'unité de temps par l'unité de surface du corps rayonnant, lorsque la radiation considérée prend naissance. Cette définition entraîne pour x une signification analogue. Dans le cas actuel, il est facile de donner la valeur du flux par centimètre carré, correspondant à une énergie totale dépensée de 1 volt-ampère. Le filament de Swan (*fig.* 12) peut être assimilé à un demi-tore supporté par deux co-

Fig. 12.



lonnes cylindriques de même diamètre. La lampe qui servait aux expériences avait été choisie à la loupe parmi un grand nombre d'autres, et le diamètre du filament, mesuré en différents points sur la machine à diviser, a été trouvé remarquablement constant et égal à $0^{cm},025$. Il en résulte qu'il suffisait de déterminer la longueur totale *abc* de l'axe du filament pour obtenir immédiatement la surface totale rayonnante. Cette longueur, mesurée également à la machine à diviser, est $4^{cm},1$. Donc la surface du filament est

$$3,1416 \times 0,025 \times 4,1 = 0^{cmq},328.$$

Donc, pour une énergie totale de 1 volt-ampère, le rayonnement par centimètre carré, en petites calories, est

$$\frac{10^7}{42 \times 10^6 \times 0,328} = \frac{10}{42 \times 0,328} = 0,7.$$

Il en résulterait, pour la valeur correspondante de K,

$$K = 1,12 \times 0,7 = 0,78.$$

Détermination de a.

L'étude de la fonction a se conçoit sans difficulté. Imaginons qu'on forme le spectre, supposé normal et dégagé de toute absorption, de la lampe qui a servi aux expériences ou de toute autre lampe à filament cylindrique et de surface connue. Pour une énergie x, on évaluera les intensités calorifiques des diverses radiations du spectre lumineux, afin d'opérer sur les longueurs d'onde déjà expérimentées précédemment. On en déduira, en supposant connus K et μ, les valeurs relatives de la fonction a. L'instrument le plus propre à une telle recherche est, sans contredit, le bolomètre de M. Langley (¹) avec miroir métallique et réseau sur métal pour former le spectre normal de la lampe à incandescence. Cet appareil a déjà donné, entre les mains de son savant auteur, des résultats assez remarquables pour qu'on soit en droit de compter sur la précision et la sûreté de ses indications.

Il est important de remarquer que cette détermination de la fonction a pourra être effectuée indépendamment de la lampe à incandescence employée dans les recherches précédentes ou de toute autre lampe dont il faudrait déterminer la surface rayonnante. On conçoit, en effet, que, dans ses températures graduellement croissantes, le filament de charbon a dû passer par la température de la lampe Carcel. A ce moment, la composition du flux est la même dans ces deux sources et elle restera la même dans les deux spectres juxtaposés à l'oculaire du spectrophotomètre, si toutefois les conditions indiquées précédemment sont satisfaites; c'est-à-dire si les rayons de chaque source traversent, avant de tomber sur la fente, les mêmes épaisseurs de milieux absorbants. Donc, à ce moment, l'égalité établie par la rotation du nicol pour une radiation quelconque sera réalisée pour toute l'étendue des deux spectres. C'est ainsi que l'expérience a été faite. Un second nicol a été placé sur le trajet des rayons venus de la lampe à incandescence; les quatre nicols ainsi placés par paires sur chaque faisceau étant d'égale épaisseur, les conditions de comparabilité des sources, au point de vue de la teinte, sont satisfaites. On a trouvé, au moment de l'égalité, pour l'intensité I, la différence de potentiel E

$$I = 1^{\text{amp}},375,$$
$$E = 8^{\text{volts}},887,$$

(¹) *American Journal of Science and Arts*, t. XXI, p. 187; 1881.

ce qui donne, pour l'énergie sous l'action de laquelle la lampe vaut le carcel, comme teinte,

$$W = 12,22.$$

Si toutes les déterminations relatives à la lampe Swan avaient pu être faites dans les conditions de comparabilité de cette dernière expérience, les courbes devraient toutes se couper en un point ayant précisément pour abscisse cette valeur 12, 22. En réalité, il n'en est rien, mais nous pouvons calculer les valeurs des coefficients a qui amènent ces courbes à passer par le point d'abscisse 12, 22 et d'ordonnée arbitraire, 30 par exemple. Ces valeurs sont les suivantes :

λ......	$0^{\mu},709$	$0^{\mu},686$	$0^{\mu},635$	$0^{\mu},595$	$0^{\mu},5888$	$0^{\mu},526$	$0^{\mu},486$
a......	$0^{\mu},2381$	$0^{\mu},2182$	$0^{\mu},1341$	$0^{\mu},0943$	$0^{\mu},0802$	$0^{\mu},0395$	$0^{\mu},0248$

C'est avec les nombres précédents pour a et les valeurs de b et de c données dans les Tableaux qu'ont été construites les courbes (*fig.* 13). Les parties figurées en pointillé sont en dehors des expériences.

Nous conclurons de ce qui précède que, si nous parvenons à déterminer le spectre calorifique normal de la lampe Carcel, il suffira de multiplier les valeurs précédentes de a par les ordonnées correspondantes de ce spectre pour obtenir la valeur relative de la radiation dans la constitution du flux total.

On peut aller plus loin et montrer que la connaissance d'un spectre calorifique d'une source quelconque permet de résoudre la question, pourvu que l'on connaisse la constitution spectrale de cette source par rapport au carcel. Le faisceau des courbes (*fig.* 13) peut nous donner une idée de cette constitution et de ses variations. Le filament de charbon constitue, en effet, une source dont la teinte, égale à celle du carcel pour l'énergie 12,22, est dite plus rouge que celle du carcel pour les énergies inférieures et plus bleue pour les énergies supérieures à 12, 22. En un mot, pour une énergie quelconque, la teinte ou, si l'on veut, la température optique Θ peut être représentée par le rapport des ordonnées de deux courbes prises arbitrairement. Les radiations choisies par M. Crova (¹) pour définir ainsi la température optique sont $\lambda_1 = 0^{\mu},676$, $\lambda_2 = 0^{\mu},523$, et la détermination de cette température se fait en égalant les plages rouges au spectrophotomètre et

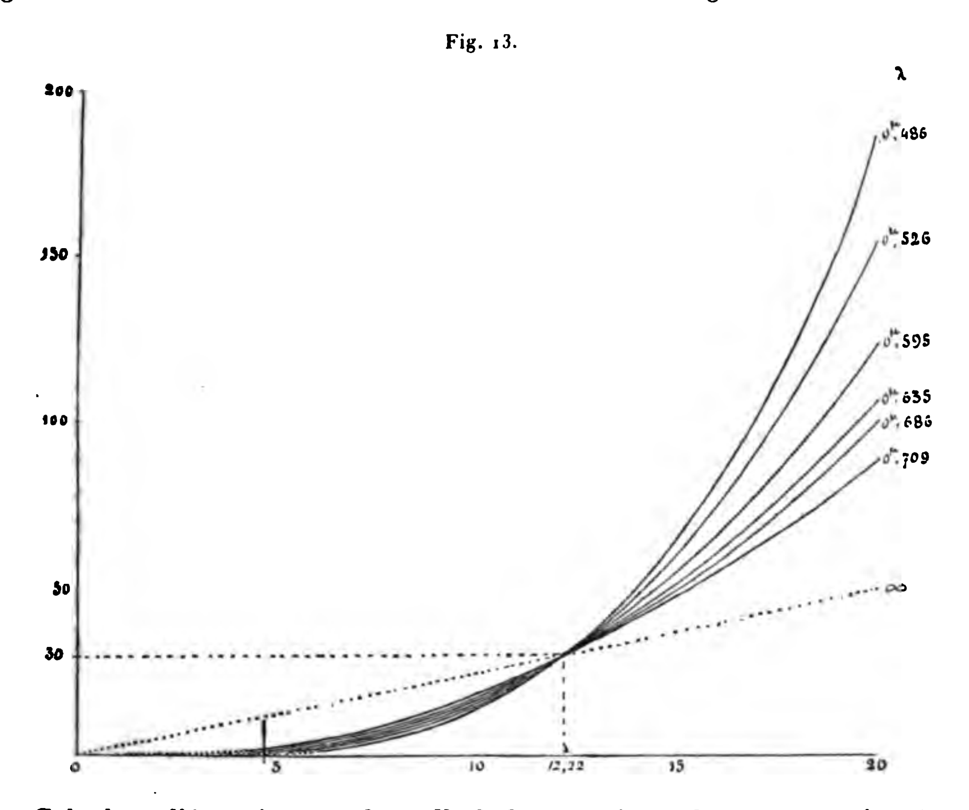
(¹) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XC, p. 252.

mesurant le rapport des intensités des plages vertes. Il est clair que cette définition revient à la précédente. M. Crova a trouvé ainsi :

	θ.
Gaz de l'éclairage	1,372
Lampe Drummond (oxygène et gaz de l'éclairage)	1,806
Lumière électrique (60[el] Bunsen)	3,060
» solaire	4,049

Ces nombres vont nous permettre de nous faire une idée de l'ordre de grandeur du coefficient a relativement aux diverses longueurs d'onde.

Fig. 13.



Calculons l'énergie pour laquelle la lampe à incandescence aurait même teinte que le Soleil, en admettant qu'elle pût subsister jusque-là.

Les constantes a, b, c relatives aux longueurs d'onde $0^{\mu},676$, $0^{\mu},523$, calculées d'après les formules précédentes et la condition, pour les courbes, de passer par le point commun, sont

λ.	b.	c.	log a.
$0^{\mu},676$	1,65	2,14	$\bar{1}$,28562
0,523	2,10	2,91	$\bar{2}$,55205

L'énergie x sera, par conséquent, donnée par la relation

$$\log a_r + \log 4{,}049(x - 1{,}65)^{2{,}14} = \log a_v + \log(x - 2{,}10)^{2{,}91}.$$

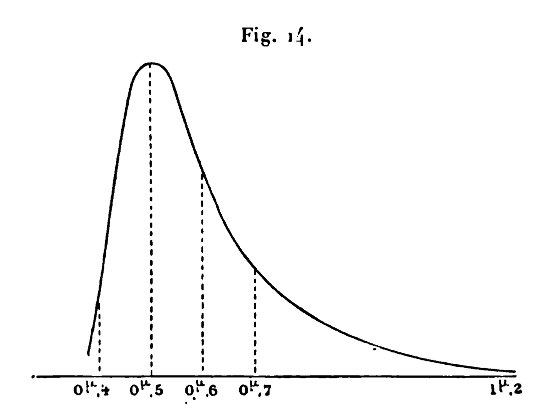
On pourrait résoudre cette équation en donnant à x des valeurs de plus en plus rapprochées et comprenant la solution cherchée; mais il est suffisant, eu égard à la grande valeur de x, de remplacer les origines 1,65 et 2,10 par leur moyenne 1,875. On obtient alors, sans difficulté,

$$x - 1{,}875 = 55{,}14,$$
$$x = 57{,}01.$$

Quelque élevé que paraisse ce nombre, il est bon de remarquer qu'il ne correspond pas, en réalité, à une température d'émission bien considérable; toutefois il est clair qu'une valeur d'extrapolation aussi éloignée des limites de l'expérience n'a plus de signification absolument rigoureuse. Elle nous suffira cependant pour nous rendre compte des valeurs relatives que prend a pour les diverses radiations. M. Langley, dans un travail remarquable publié récemment (1), a déterminé, au moyen du bolomètre, la distribution de la chaleur dans le spectre normal du Soleil, supposé produit aux limites de l'atmosphère.

La *fig.* 14 peut donner une idée des résultats obtenus, et l'on voit que

Fig. 14.



le maximum d'énergie correspond sensiblement à la longueur d'onde $\lambda = 0^\mu,5$. Si donc nous appliquons aux longueurs d'onde $0^\mu,4$, $0^\mu,5$, $0^\mu,6$,

(1) *Researches on solar heat and its absorption by the Earth's atmosphere;* Washington, Government printing Office; 1884.

$0^\mu,7$ la formule précédente, où $x = 57{,}01$,

$$y = a\left(57{,}01 - \frac{1{,}12}{\lambda}\right)^{1+\frac{0{,}522}{\lambda^2}},$$

nous déduisons, pour les diverses valeurs de a :

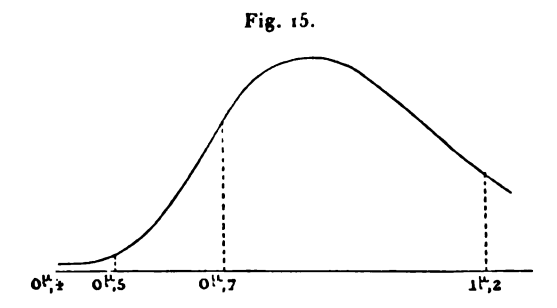
λ.	a.
0,4	0,00000075
0,5	0,000359
0,6	0,00303
0,7	0,00702

Cet exemple, le seul que l'on puisse donner actuellement, puisque les spectres calorifiques des autres sources lumineuses n'ont pas été déterminés, suffit à montrer avec quelle rapidité le coefficient a croît du violet au rouge. Toutefois cet accroissement ne se maintient pas aux grandes longueurs d'onde, et, si l'on essaye d'appliquer les formules précédentes à $\lambda = 1^\mu,2$, auquel cas $y = 1$, on trouve

$$a = 0{,}00418;$$

en d'autres termes, la valeur de a passerait par un maximum, ainsi que le figure la courbe (*fig.* 15); mais il est inutile d'insister sur ces considéra-

Fig. 15.



tions. C'est à l'expérience directe à nous renseigner sur les valeurs de a, et l'application que nous venons de faire des formules montre comment cette étude peut être faite au moyen d'une source quelconque, pourvu qu'on ait déterminé, au préalable, sa température optique et que cette température ne soit pas supérieure à celle de la lampe à incandescence aux plus fortes énergies employées.

Limite des expériences.

Il est facile de marquer cet état limite sur l'échelle des températures optiques.

En se reportant, en effet, aux courbes générales ou aux Tableaux de la lampe Swan, on voit que l'énergie, dans certains cas, a été poussée jusqu'à 21,35. En admettant donc que l'énergie 20 marque la limite jusqu'à laquelle la formule est établie et applicable, en toute rigueur, à toute valeur de λ (au moins en ce qui concerne l'exposant c), on aura, pour la température optique de la source incandescente,

$$\theta = \frac{a_v(20 - 2,10)^{2,91}}{a_r(20 - 1,65)^{2,14}}, \qquad \theta = 1,615.$$

On voit que, pour déterminer les valeurs de a, on pourra s'adresser soit à la lampe Carcel $\Theta = 1,0$, soit au bec d'Argand $\Theta = 1,372$, soit enfin, et à la rigueur, à la lampe Drummond $\Theta = 1,8$; mais il est clair que cette dernière source est trop variable pour pouvoir être employée utilement.

De la température réelle à laquelle a été porté le filament de charbon, nous ne savons rien, sinon que cette température, supérieure à celle de la lampe Carcel, considérée comme voisine de 2000°, est, par suite, beaucoup plus grande que toutes celles que peut acquérir le platine incandescent. Nous pouvons cependant essayer de nous en faire une idée en appliquant, par extrapolation, la formule de M. Violle à nos expériences. On aura, en effet, d'après cette formule,

$$i_r = m_1 \mathrm{T}\, b^{\mathrm{T}^2} a_r^{\mathrm{T}}, \qquad i_v = m_2 \mathrm{T}\, b^{\mathrm{T}^2} a_v^{\mathrm{T}},$$
$$i'_r = m_1 \mathrm{T}'\, b^{\mathrm{T}'^2} a_r^{\mathrm{T}'}, \qquad i'_v = m_2 \mathrm{T}'\, b^{\mathrm{T}'^2} a_v^{\mathrm{T}'}$$

et, par suite,

$$\theta = \frac{\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}}\, b^{\mathrm{T}'^2-\mathrm{T}^2} a_v^{\mathrm{T}'-\mathrm{T}}}{\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}}\, b^{\mathrm{T}'^2-\mathrm{T}^2} a_r^{\mathrm{T}'-\mathrm{T}}} = \left(\frac{a_v}{a_r}\right)^{\mathrm{T}'-\mathrm{T}}.$$

D'après M. Violle, la fonction a a pour expression, en fonction de la longueur d'onde,

$$\alpha - \beta\lambda,$$

avec les valeurs

$$\alpha = 1,0355,$$
$$\beta = 13,$$

λ étant exprimé en millimètres.

En appliquant cette formule aux longueurs d'onde au moyen desquelles nous avons défini, avec M. Crova, la température optique, nous trouvons

$$\theta = 1,00189^{T'-T},$$

T étant la température du carcel, T′ celle de la source considérée.

Or, dans nos expériences limites, $\Theta = 1,615$; par suite,

$$T' - T = \frac{\log 1,615}{\log 1,00189} = 254°.$$

Ainsi le filament de charbon a été porté, dans ces expériences, jusqu'à une température d'environ 2250°, supérieure, par conséquent, de près de 500° à celle du platine en fusion.

PARTAGE

D'UNE

BASE ENTRE DEUX ACIDES,

CAS PARTICULIER DES CHROMATES ALCALINS,

PAR M. PAUL SABATIER,

Professeur de Chimie à la Faculté des Sciences de Toulouse.

I. — INTRODUCTION.

La distribution des acides et des bases dans les dissolutions salines est un des problèmes les plus importants de la statique chimique. Au siècle dernier, Bergmann, résumant un grand nombre d'observations et précisant les idées de ses devanciers, attribuait à chaque substance, particulièrement à chaque acide et à chaque base, une puissance chimique spéciale, caractéristique, qui n'était autre que l'*affinité*. Toute matière se trouvait ainsi définie par son affinité, et toute réaction chimique entre plusieurs corps mis en présence pouvait être prévue par la connaissance relative de leurs affinités.

Théorie de Berthollet. — Malheureusement l'expérience fut le plus souvent en désaccord avec ces principes; Berthollet en fut si vivement frappé, qu'il rejeta comme vaines toutes les idées de Bergmann, et, refusant d'admettre n'importe quelle affinité élective, il chercha la cause unique des réactions dans les phénomènes physiques, c'est-à-dire dans la *cohésion* intervenant pour éliminer, sous forme volatile ou insoluble, une matière déterminée.

Lorsque, dans une dissolution, $1^{éq}$ de base B se trouve en présence de deux acides A et A′, Berthollet pense que ces derniers interviennent avec une énergie toute semblable et se partagent la base proportionnellement au nombre d'équivalents. Si l'on a n équivalents de A, n' de A′, il se for-

mera

$$\frac{n}{n+n'} \text{ équivalents du sel AB,}$$

$$\frac{n'}{n+n'} \text{ équivalents du sel A'B;}$$

le reste des acides, savoir $\frac{n^2+nn'-n}{n+n'}$ de A, et $\frac{n'^2+nn'-n'}{n+n'}$ de B, demeure libre.

Ce partage a toujours lieu *dans l'état dissous,* quelle que soit la nature des acides, qu'ils soient de l'acide chlorhydrique, nitrique, borique ou cyanhydrique. Mais il n'en sera plus ainsi quand l'un des sels formés, par exemple AB, est insoluble ou volatil : alors il s'élimine du système; un nouveau partage a lieu, jusqu'à ce que l'élimination de la base B soit devenue totale sous forme de sel AB. C'est l'expression de ce mécanisme qui constitue les lois classiques, dites *lois de Berthollet.*

Théorie actuelle. — Un grand nombre de faits observés sont incompatibles avec les idées de Berthollet sur l'indifférence chimique des acides et des bases. Lorsque deux acides se trouvent dans une dissolution en présence d'une base, avec laquelle ils peuvent donner des sels solubles, il se produit bien un partage, mais la valeur de ce partage n'est pas, comme le pensait Berthollet, indépendante de la nature des acides et de la base. Il y a lieu de rétablir en quelque manière la notion d'affinité élective repoussée par Berthollet : il faut distinguer les acides *forts* des acides *faibles,* les bases *fortes* des bases *faibles;* et cette caractéristique se traduit dans le partage par une prédominance de combinaison au profit des acides forts et des bases fortes.

L'étude thermique des réactions, instituée principalement par M. Berthelot, ne peut laisser aucun doute à ce sujet : les nombreuses mesures qu'il a effectuées, les résultats analogues obtenus par M. Thomsen, permettent d'apprécier la nature des partages que fournissent les dissolutions en l'absence de toute intervention de la cohésion. Néanmoins les phénomènes ont reçu des interprétations fort différentes.

Interprétation de M. Berthelot. — D'après M. Berthelot, le mécanisme des réactions salines est uniquement réglé par le principe du travail maximum. L'action a toujours lieu dans le sens thermique positif, à condition toutefois que les corps soient rapportés à des états physiques comparables, et aussi conformes que possible à leur constitution au sein de la dissolution.

On réalise ce double but en ramenant tous les éléments à l'état d'hydrates solides.

Pourtant des modifications profondes peuvent se produire, dans un sens qu'on peut d'ailleurs prévoir à l'avance, en vertu des actions décomposantes que la chaleur ou plutôt l'eau du dissolvant exerce sur quelques composants du système.

Dans l'état anhydre, l'accord est fort net, quoique parfois dissimulé par l'intervention des sels basiques ou acides.

Dans les dissolutions, la vérification est très satisfaisante, lorsque les éléments du système sont indécomposables par l'eau. Alors le *déplacement doit être total* en faveur de l'acide ou de la base qui dégage le plus de chaleur; aucun partage ne saurait se produire, et cela sans intervention d'aucun phénomène physique de volatilisation ou précipitation. C'est ainsi que la soude déplace totalement l'ammoniaque de ses sels, celle-ci agissant de même, tout demeurant dissous, sur l'oxyammoniaque ou sur l'aniline ([1]). De même les acétates alcalins, dissous dans beaucoup d'eau, sont sensiblement décomposés en entier par l'acide chlorhydrique ou l'acide nitrique ([2]).

Ce cas est un peu exceptionnel, et souvent l'existence de sels acides ou basiques, plus ou moins dissociés par l'eau, détermine l'établissement d'un véritable partage, qui provient de l'équilibre entre les affinités et la force destructive antagoniste issue du dissolvant. C'est alors que le mécanisme de Berthollet interviendra puissamment pour rendre l'action totale, si l'un des éléments qui figurent dans le partage en est éliminé sous forme insoluble ou volatile ([3]).

Interprétation de M. Thomsen. — M. Thomsen a donné une théorie bien différente qui n'est guère qu'une réédition corrigée des affinités électives de Bergmann. Conduit par l'expérience à constater fréquemment un partage quand deux acides agissent simultanément sur une même base, il a cru pouvoir y définir le rôle de chaque acide par une constante caractéristique qu'il a nommée *avidité* ([4]).

Ce coefficient change avec les bases et se *trouve absolument indépendant de la basicité et des chaleurs de neutralisation.* M. Thomsen publie

---

([1]) BERTHELOT, *Mécan. chimique*, t. II, p. 689 et suivantes.
([2]) *Ibid.*, t. II, p. 593.
([3]) *Ibid.*, t. II, Chap. IV, VI, *passim*.
([4]) THOMSEN, *Thermochem. Untersuchungen*, t. I, p. 114, 307.

(p. 308) un Tableau des avidités des principaux acides relativement à la soude. Lorsque $1^{éq}$ de soude est mis en présence de plusieurs acides, le partage aurait lieu proportionnellement au produit de l'avidité par le nombre d'équivalents.

Cette théorie serait sans doute très commode si elle était vraie, bien qu'elle ne soit guère qu'une règle empirique généralisée et élargie : mais il est facile de la trouver en défaut, comme l'a fait remarquer M. Berthelot (1), et comme nous le montrerons aussi dans la suite de ce travail.

Méthodes d'étude. — Quoi qu'il en soit, les équilibres salins fournissent le plus souvent des partages, dont il importe de connaître la valeur. Des recherches ont été à plusieurs reprises instituées dans ce but par diverses méthodes.

La plus générale est sans contredit la *méthode calorimétrique.* Soit, par exemple, un acide A agissant sur un sel A'B : le partage qui s'établit donne une certaine proportion du sel AB (2)

$$A + A'B = m\,AB + (1 - m)\,A'B + (1 - m)\,A + m\,A'.$$

La réaction effectuée dans le calorimètre produit une quantité de chaleur Q, positive ou négative. On doit avoir

$$Q = m(N - N'),$$

N et N' étant les chaleurs de neutralisation de la base B par les acides A et A'. On pourra en déduire

$$m = \frac{Q}{N - N'}.$$

Malheureusement, il arrive fréquemment que Q et N — N' sont petits, et de faibles erreurs commises dans l'évaluation de ces grandeurs entraîneront pour *m* une incertitude considérable. Aussi la méthode calorimétrique, qui convient parfaitement pour l'étude qualitative des réactions de partage, ne peut guère servir à en évaluer la grandeur.

Ce défaut, qui provient du caractère différentiel du procédé suivi, doit se retrouver dans l'élégante *méthode de congélation,* instituée par M. Raoult (*Ann. de Chimie et de Phys.,* 6e série; t. II, p. 93, 99). Dans le cas con-

(1) Berthelot, *Mécan. chimique,* t. II, p. 640.

(2) On suppose ici qu'il n'y a formation d'aucun sel acide ou basique.

sidéré plus haut, on mesurera directement l'abaissement de congélation de la solution (A + A′B), soit φ. En appelant

α l'abaissement pour la solution		A;
α'	»	A′;
β	»	AB;
β'	»	A′B;

on aura la relation

$$\varphi = m(\beta + \alpha') + (1 - m)(\alpha + \beta'),$$

d'où l'on tire

$$m = \frac{\varphi - (\alpha + \beta')}{\alpha' + \beta - (\alpha + \beta')}.$$

Lorsque les deux termes du rapport sont petits, toute précision disparaît.

La méthode si ingénieuse basée sur les *coefficients de partage* entre deux dissolvants a permis à M. Berthelot de définir la nature de quelques équilibres : mais le plus souvent ceux-ci peuvent être un peu modifiés par l'introduction d'un second dissolvant autre que l'eau.

Quant au procédé d'études que Malaguti avait basé sur l'*insolubilité dans l'alcool* de deux éléments des systèmes, il est nécessairement imparfait, comme l'insolubilité elle-même.

Une *méthode optique,* fondée sur l'absorption sélective de la lumière transmise, m'a paru devoir offrir de grands avantages, lorsqu'elle pourrait être appliquée, c'est-à-dire toutes les fois que, parmi les composants du système, plusieurs se distinguent par une coloration spéciale.

Une tentative dans ce sens fut faite en 1855 par Gladstone (*Philosophical Transact.*, p. 179), qui étudiait l'action du sulfocyanure de potassium sur les sels ferriques dissous, grâce à la belle coloration rouge du sulfocyanure ferrique qui prend naissance. Malheureusement le phénomène paraît assez complexe, étant donnée surtout la faiblesse relative des sels de fer au maximum.

La méthode m'a semblé au contraire se présenter dans des conditions avantageuses de simplicité pour les chromates alcalins, les chromates neutres possédant une coloration jaune très intense, tandis que les bichromates, et aussi l'acide chromique, se distinguent par une coloration rouge orangé fort nette. J'ai pensé que ces différences de coloration seraient suffisantes pour servir de base à une étude approfondie des équilibres que fournissent

dans les dissolutions les chromates alcalins. C'est le principal objet du présent travail.

II. — Données thermiques sur la statique des chromates alcalins.

Dans un Mémoire très important publié dans les *Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. I, p. 92; 1884), M. Berthelot a étudié la chaleur de formation des chromates alcalins.

Prenant comme point de départ une détermination de M. Thomsen :

CrO^3 étendu + KO étendue = $KCrO^4$ diss.

dégage à 12° .... $+12^{Cal},6$

» à 18° .... $+12^{Cal},4$

il a trouvé que

KCr^2O^7 étendu + KO étendue = $2K\,CrO^4$ diss.

dégage à 12° .... $+11^{Cal},6$

Il en déduit

$2CrO^3$ étendu + KO étendue = KCr^2O^7 diss.

dégage à 12° .... $+13^{Cal},4$

» à 18° .... $+13^{Cal},2$

J'ai repris moi-même ces déterminations à l'aide de solutions d'acide chromique pur. J'ai obtenu ainsi directement comme moyennes de plusieurs expériences :

1° *Formation du chromate neutre de potasse*, à partir de la potasse et de l'acide chromique

$CrO^3(1^{éq} = 2^{lit}) + KO(1^{éq} = 2^{lit})$ dégage à 18° .... $+12^{Cal},7$

2° *Formation du bichromate de potasse*, à partir de la potasse et de l'acide chromique

$2CrO^3(1^{éq} = 2^{lit}) + KO(1^{éq} = 2^{lit})$ dégage à 17° .... $+13^{Cal},5$

3° *Formation du bichromate à partir du chromate neutre :* J'ai trouvé directement que

$CrO^3(1^{éq} = 2^{lit}) + KCrO^4(1^{éq} = 2^{lit})$ dégage à 18° ...... $+0^{Cal},8$

Des deux valeurs précédentes, on déduit pour cette dernière vers 18°

$$13^{Cal},5 - 12,7 = 0,8,$$

c'est-à-dire rigoureusement le même nombre.

4° *Formation du chromate neutre à partir du bichromate :* La mesure directe donne à 16°,5 :

$$KCr^2O^7(1^{éq} = 2^{lit}) + KO(1^{éq} = 2^{lit}) \text{ dégage....} \quad +11^{Cal},5$$

Les valeurs inscrites plus haut donnent

$$2 \times 12,7 - 13,5 = 11^{Cal},9.$$

Nous adopterons la moyenne de ces deux nombres, soit

$$+11^{Cal},7,$$

voisin du nombre 11,6, trouvé par M. Berthelot.

Ainsi, lorsqu'on ajoute à $2^{éq}$ d'acide chromique, soit $Cr^2O^6 = 100^{gr},4$, deux équivalents successifs de potasse :

Le premier équivalent dégage	$+13^{Cal},5$
Le second »	$+11^{Cal},7$

Le premier de ces nombres est comparable aux chaleurs de neutralisation de la potasse par l'acide azotique, l'acide chlorhydrique, l'acide acétique.

Le second est inférieur à la chaleur dégagée par l'union de $1^{éq}$ d'alcali avec l'acide citrique, voisin des valeurs qu'on obtient avec les acides borique et carbonique.

De cette comparaison on peut déduire des prévisions sur la stabilité des chromates en présence des acides. Mais on arrive à un résultat bien meilleur, si, au lieu de considérer les données thermiques des dissolutions, on les rapporte à l'état solide des corps réagissants, comme M. Berthelot l'a recommandé (voir ci-dessus, p. G.3), surtout si nous ramenons aux hydrates stables solides les plus riches de ceux pour lesquels nous possédons des données thermiques précises.

L'acide chromique, pas plus que l'acide sulfureux ou carbonique, ne paraît former d'hydrate stable : on n'en a jamais isolé de défini, et d'ailleurs sa *chaleur de dissolution* dans l'eau est assez petite. J'ai mesuré sa

valeur avec de l'acide chromique pur, bien privé d'acide sulfurique,

$$CrO^3 (50^{gr},2) = \text{diss. dégage à } 19° \ldots\ldots\ldots \quad +0^{Cal},95$$

Graham avait indiqué $1^{Cal},1$.

Nous pouvons donc sans erreur notable prendre l'acide chromique anhydre solide au lieu de son hydrate.

Nous trouvons ainsi

$$Cr^2O^6 \text{ sol.} + KO, 5HO \text{ sol.} = \underbrace{KCr^2O^7}_{\text{Bichromate.}} \text{ sol.} + 5HO \text{ sol} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad +27^{Cal},3$$

$$\underbrace{KCr^2O^7}_{\text{Bichromate.}} \text{ sol.} + KO, 5HO \text{ sol.} = \underbrace{KO, KCr^2O^7}_{\text{Chromate neutre.}} \text{ sol.} + 5HO \text{ sol} \ldots\ldots \quad +11^{Cal},9$$

Nous aurons de même pour l'action des principaux acides hydratés solides sur l'hydrate solide KO, 5HO, avec formation d'hydrates solides et d'eau solide :

	Cal	
$S^2O^6, 4HO$ donnant bisulfate	+30,9	
$\underbrace{S^2O^6, KO, HO}_{\text{Bisulfate.}}$ donnant sulfate neutre	+24	
HCl, 4HO sol	+28,3	
$C^4H^4O^4$ sol	+22,3	
C^2O^4 sol. donnant bicarbonate	+18,8	
$\underbrace{KO, HO, C^2O^4}_{\text{Bicarbonate.}}$, donnant carbonate neutre	+ 6,2	
PhO^8H^3, HO, donnant phosphate monopotassique	+24,4	
PhO^8KH^2, donnant phosphate bipotassique	+ 5,5	(1)
PhO^8K^2H, donnant phosphate neutre	0,0	

Première fonction acide de l'acide chromique.

L'acide chromique Cr^2O^6 nous apparaît donc comme un acide bibasique à deux fonctions très inégales. La première, qui donne lieu à la formation du bichromate de potasse, n'est, d'après le Tableau ci-dessus, surpassée nettement que par l'acide sulfurique (première fonction donnant le bisulfate) : elle est peu différente de l'acide chlorhydrique, nettement supérieure

(1) ... page G.26.

aux acides acétique, carbonique, même à la première fonction de l'acide phosphorique. Le bichromate de potasse sera donc un sel très stable qui ne subira sans doute aucune action décomposante des acides acétique, carbonique et même phosphorique, non plus que du bisulfate de potasse.

Il sera au contraire détruit par l'acide sulfurique avec formation de bisulfate et d'acide chromique libre.

En effet, M. Berthelot a trouvé, en faisant agir dans le calorimètre un grand excès d'acide sulfurique sur le chromate neutre de potasse dilué, que l'acide chromique était en majeure partie devenu libre : les chaleurs dégagées indiquent environ un déplacement des $\frac{2}{3}$ (*loco citato*, p. 98).

J'ai trouvé que la réaction

$$KCr^2O^7(1^{\text{éq}} = 4^{\text{lit}}) + 2SO^3(1^{\text{éq}} = 2^{\text{lit}})$$
dégage à 14°.................... $+ 0^{\text{Cal}},4$

L'action totale avec formation de bisulfate devrait donner

$$14^{\text{Cal}},6 - 13^{\text{Cal}},5 = 1^{\text{Cal}},1.$$

Le déplacement serait d'au moins $\frac{1}{3}$ de l'acide chromique.

L'acide sulfurique donne donc avec le bichromate de potasse un partage d'autant plus voisin du déplacement total qu'il agit en plus grand excès.

Pour l'acide chlorhydrique, les valeurs thermiques étant très voisines aussi bien dans l'état solide que dans les dissolutions, on ne peut guère prévoir le résultat. L'expérience directe, réalisée dans le calorimètre, ne pourra non plus nous apprendre grand'chose.

J'ai cependant essayé de faire agir sur $1^{\text{éq}}$ de bichromate de potasse $(1^{\text{éq}} = 4^{\text{lit}})$ de petites doses successives d'acide chlorhydrique $(1^{\text{éq}} = 2^{\text{lit}})$. Le déplacement d'acide chromique, s'il doit se produire, tend à être total au début. J'ai trouvé ainsi que le phénomène calorifique est sensiblement proportionnel à l'acide ajouté, soit à 15° par équivalent $-0^{\text{Cal}},2$, valeur fort petite. La proportionnalité indique ou le déplacement total, ou l'absence de réaction. Cette dernière hypothèse me paraît plus vraisemblable.

La première fonction de l'acide chromique est donc celle d'un acide *fort*.

Deuxième fonction de l'acide chromique, ou fonction acide du bichromate de potasse.

Le bichromate de potasse, qui provient de l'exercice de la première fonction acide de l'acide chromique, conserve la deuxième fonction, très différente de la première. Le Tableau que nous avons donné plus haut montre de suite que la fonction acide du bichromate est nettement inférieure à celles des acides chlorhydrique, acétique, aux deux fonctions de l'acide sulfurique, à la première fonction de l'acide phosphorique et même de l'acide carbonique. Mais elle l'emporte certainement sur celle du bicarbonate de potasse, et sur la dernière de l'acide phosphorique.

Nous devrons donc considérer le bichromate de potasse comme un acide de force moyenne, capable de s'unir avec la potasse, l'ammoniaque, pour donner des sels moins stables que des acétates, plus stables que des phénates.

Le sel formé avec la potasse est le chromate neutre de potasse

$$KO, KCr^2O^7,$$

que l'on écrit d'ordinaire

$$KCrO^4.$$

Les conditions thermiques de sa formation ont été précisées par M. Berthelot.

Le sel formé avec l'ammoniaque est

$$AzH^4O, KCr^2O^7;$$

c'est un sel connu, qui se présente en beaux cristaux brillants analogues au chromate neutre : on l'appelle d'ordinaire *chromate double de potasse et d'ammoniaque*. J'ai précisé les conditions de sa formation.

Chromate double de potasse et d'ammoniaque. — On obtient une dissolution de ce sel en ajoutant de l'ammoniaque à du bichromate de potasse. La réaction effectuée dans le calorimètre m'a donné

$$KCr^2O^7(1^{éq} = 4^{lit}) + AzH^3(1^{éq} = 2^{lit})$$
dégage à 23° .... $+10^{Cal},6$

La potasse donnait environ $+11^{Cal},7$.

L'addition d'un excès d'ammoniaque dégage environ $+0^{Cal},3$.

Pour en déduire les conditions de formation dans l'état solide, il faut

connaître la chaleur de dissolution du sel cristallisé : ce dernier se prépare aisément en évaporant dans le vide, en présence de potasse caustique solide, une solution de bichromate de potasse additionnée d'un excès d'ammoniaque. Les cristaux sont d'un beau jaune et possèdent un vif éclat. Exposés à l'air, ils dégagent peu à peu du gaz ammoniac et de la vapeur d'eau, et prennent la couleur rouge du bichromate.

J'ai mesuré la chaleur de dissolution de ce sel dissous dans quarante fois son poids d'eau; on trouve à 17°

Pour $AzH^4O, KCr^2O^7 = 173^{gr},4$ .... $-5^{Cal},3$

A l'aide des données thermiques déjà acquises, nous en déduisons la chaleur de formation du composé solide :

Premier cycle.

	Cal
KCr^2O^7 sol. = diss	$-8,5$
AzH^3 gaz = diss	$+8,8$
HO sol. = liq	$-0,7$
KCr^2O^7 diss. + AzH^3 diss. = diss	$+10,6$
Total	$+10,2$

Deuxième cycle.

KCr^2O^7 sol. + HO sol. + AzH^3 gaz = sel sol.	x
AzH^4O, KCr^2O^7 sol. = diss	$-5,3$
Total	$x-5,3$

d'où

$$x = +15^{Cal},5$$

Nous pouvons aussi considérer ce composé comme produit par la combinaison des deux chromates neutres

$$KCrO^4 + AzH^4CrO^4.$$

J'ai mesuré *la chaleur de dissolution du chromate neutre d'ammoniaque*. Ce dernier, bien cristallisé, étant dissous dans cinquante fois son poids d'eau à 18°, donne

Pour $AzH^4CrO^4 = 76^{gr},2$ .... $-2^{Cal},9$

En nous reportant aux valeurs calorimétriques indiquées par M. Ber-

thelot, nous trouvons que

$$KCrO^4 \text{diss.} + AzH^4CrO^4 \text{diss. dégage} \ldots\ldots \quad + 0^{Cal},3$$

On en déduit que

$$KCrO^4 \text{sol.} + AzH^4CrO^4 \text{sol.} = AzH^4KCr^2O^8 \text{sol.}$$

ne donne lieu qu'à un phénomène thermique négligeable.

Ceci nous amène donc à penser que ce composé n'est pas un vrai sel double produit par l'union des deux chromates neutres, mais plutôt un véritable sel ammoniacal provenant de la fonction acide du bichromate de potasse.

III. — Action des acides sur le chromate neutre de potasse.

Nous avons été conduit à considérer le chromate neutre de potasse comme le sel alcalin d'un acide monobasique de force moyenne, qui est le bichromate de potasse. Le caractère fonctionnel de ce dernier, défini par les données thermiques de l'état solide, lui assigne une place certainement intermédiaire entre l'acide acétique et le bicarbonate de potasse.

Il est dès lors facile de prévoir quelle sera l'action des divers acides sur le chromate de potasse, ou, ce qui revient au même, quels seront les déplacements réciproques du bichromate de potasse et des divers acides relativement à la potasse.

Les acides forts mis en présence du sel neutre tendront à produire le déplacement complet du bichromate, au profit du nouvel acide : c'est un fait bien connu et depuis longtemps utilisé dans l'industrie des chromates [1]. La mise en liberté du bichromate de potasse rouge se traduit dans la liqueur jaune-citron par un changement de teinte qui est très facile à saisir, et qui permettrait d'utiliser en quelque manière les chromates comme réactif colorant pour les dosages acidimétriques (voir à ce sujet M. Berthelot, *Ann. de Chim. et de Phys.*, 6e série, t. VI, p. 506).

Le bichromate de potasse pourra lui-même, dans certains cas, être décomposé par l'acide antagoniste, avec production d'acide chromique libre.

---

(1) Schweitzer, *Jahresber.*, p. 351, 1854, et *Journ. für prakt. Chem.*, t. LXV, p. 173. — Marguerite, *Journ. de Pharm. et de Chim.*, 3e série, t. XXVII, p. 21. — Mohr, *Ann. der Chem. und Pharm.*, t. CLXXXV, p. 289.

Ce phénomène ne serait d'ailleurs accusé dans la liqueur par aucun changement de teinte, puisque nous savons que les coefficients de transmission de la lumière sont sensiblement identiques pour l'acide chromique Cr^2O^6 ou le bichromate de potasse KCr^2O^7 (1).

D'après ce qui a été dit antérieurement, ce dernier effet ne se produit guère qu'avec les acides les plus forts, tels que l'acide sulfurique, la première fonction de l'acide chromique étant celle d'un acide nettement *fort*.

En réalité, pour les causes indiquées plus haut (p. G.3), on obtiendra le plus souvent, non pas la destruction totale du chromate neutre, mais un partage variable de la potasse entre le bichromate et l'acide qui lui est opposé. En opérant avec p équivalents de chromate neutre (KO, KCr^2O^7) et q équivalents d'acide, nous aurons

$$p(KO, KCr^2O^7) + q\,Ac$$
$$= m(KO, Ac) + m\,KCr^2O^7 + (p - m)(KO, KCr^2O^7) + (q - m)\,Ac.$$

Si la réaction est totale, on n'aura plus d'acide libre ou de chromate neutre non transformé

$$m = q$$

ou

$$m = p,$$

selon que p est plus grand ou plus petit que q.

La nuance d'un tel mélange, effectué sous une concentration déterminée, dépend de la proportion relative de chromate neutre et de bichromate existant dans la liqueur. Il suffirait d'évaluer ce rapport pour connaître les conditions du partage.

J'avais espéré, au début de ce travail, pouvoir aisément déduire cette valeur de la mesure du coefficient d'absorption pour une radiation connue. Mais pratiquement la méthode manque de sensibilité à cause de l'énergique absorption exercée par le bichromate dans la région qui est au contraire moyenne pour le chromate neutre : les coefficients de transmission ne peuvent, pour la région sensible du chromate neutre, être évalués que très grossièrement pour le bichromate, à cause de leur extrême exiguïté (2).

L'examen des courbes de transmission au travers des mélanges montre d'ailleurs que ce défaut de sensibilité s'accroît notablement pour les mélanges

---

(1) Voir mon Mémoire *Sur les spectres d'absorption des chromates alcalins et de l'acide chromique*, même Recueil, t. I, p. D.8.

(2) Même Mémoire, p. D.10.

riches en bichromate. Les courbes relatives à des proportions graduelles des deux sels se rapprochent de telle manière que le bichromate additionné d'un peu de chromate neutre ne se distingue guère du bichromate pur, tandis qu'on ne peut confondre le chromate neutre pur avec celui qui contient $\frac{1}{100}$ de bichromate (¹).

La comparaison avec des déterminations faites à l'avance sur des mélanges connus pourrait cependant fournir d'assez bons résultats. Mais la nécessité de multiplier les expériences, pour éliminer les imperfections de réglage des deux lumières, rendrait la méthode très lente et très pénible et exigerait un nombre immense de mesures.

Après avoir poursuivi dans ce sens quelques essais sur les partages fournis par l'acide borique, j'ai adopté une méthode colorimétrique beaucoup plus rapide et même plus sensible.

Méthode suivie. — La méthode consiste à comparer le mélange inconnu avec une gamme faite à l'avance de mélanges connus de chromate neutre et de bichromate : de l'identité de teinte on conclut à l'identité de composition.

Dans des tubes à essais d'un diamètre sensiblement uniforme, j'introduis un volume constant (10^{cc}) des mélanges gradués de bichromate et chromate neutre de même concentration (²) : ces liquides occupent dans les tubes des hauteurs à peu près constantes.

Les tubes bouchés au liège fin, puis soigneusement mastiqués, sont disposés verticalement par ordre en séries parallèles.

On forme ainsi une échelle colorimétrique de tubes étalons, où, la quantité de bichromate de potasse demeurant constante, la dose de potasse qui lui est combinée diminue progressivement depuis 1^{eq} jusqu'à zéro : le premier tube contient du chromate neutre KO, KCr^2O^7, le dernier renfermant seulement du bichromate KCr^2O^7.

La teinte varie progressivement depuis le jaune verdâtre du sel neutre pur jusqu'au rouge orangé du bichromate. L'œil apprécie aisément la différence entre deux nuances consécutives, surtout pour les tubes voisins du

(¹) De telles mesures ont été effectuées avec le spectrophotomètre de Vierordt par M. H. Settegast (*Ann. von Wied.*, N. F., VII, 1879, 242-260) : mais ces recherches, qui paraissent avoir été exécutées avec soin, n'ont en réalité fourni aucune indication quantitative sur le partage.

(²) C'est-à-dire contenant sous le même volume la même dose d'acide chromique.

chromate neutre; la sensibilité est beaucoup plus faible pour les tubes riches en bichromate : nous en avons donné plus haut la raison.

Pour ce motif, j'ai formé, comme il suit, les séries colorimétriques.

La première série de tubes contient par litre $0^{éq},5$ d'acide chromique, soit pour 4^{lit}

Cr^2O^6........................ $100^{gr},4$

ce dernier pouvant se trouver à l'état de bichromate KCr^2O^7 ou de chromate neutre KO, KCr^2O^7. Les mélanges ont été réalisés à l'aide de volumes connus de liqueurs titrées de ces deux sels, savoir :

Bichromate KCr^2O^7.............	$147^{gr},4$	dans 4^{lit} d'eau
Chromate (KO, KCr^2O^7).........	$194^{gr},4$	»

Tube 0...............	10^{cc}	chromate neutre
Tube 1...............	9,9	»
	0,1	bichromate

On poursuit ensuite en diminuant pour chaque tube de $0^{cc},1$ le volume du sel neutre et le remplaçant par $0^{cc},1$ de bichromate. Ainsi le tube 17 contient

Chromate neutre.............	$8^{cc},3$
Bichromate..................	$1^{cc},7$

le tube 30,

Chromate neutre.............	7^{cc}
Bichromate..................	3^{cc}

Donc, pour les trente et un premiers tubes (n° 0 à n° 30), la quantité de bichromate non combinée à la potasse croît de l'un à l'autre de $\frac{1}{100}$ de la dose totale.

Pour les tubes suivants, l'accroissement a été de $\frac{2}{100}$; les numéros des tubes indiquant toujours le nombre de centièmes de bichromate libre, les tubes de rang impair vont manquer.

Ainsi le tube 56 renferme

Chromate neutre.............	$3^{cc},4$
Bichromate..................	$5^{cc},6$

Au delà du tube 60, la sensibilité de teinte devenant moindre, j'ai augmenté les valeurs de l'accroissement, et j'ai seulement formé les tubes

63, 65, 68, 70, 73, 75, 78, 80, 83, 85, 88, 90, 95;

la série est terminée par le tube 100 qui, comme l'indique son rang, contient seulement du bichromate.

La gamme totale comprend donc soixante tubes.

Une deuxième série analogue, mais comprenant seulement quarante-cinq tubes, se rapporte à une concentration double, c'est-à-dire à des liqueurs contenant pour 2^{lit}

Cr^2O^6 .... $100^{gr},4$

à l'état de chromate ou de bichromate.

Les tubes se trouvant disposés parallèlement devant une glace dépolie, éclairée bien uniformément, l'œil, même peu exercé, perçoit assez facilement la différence de teinte de deux tubes consécutifs. Cette comparaison est rendue plus facile si l'œil est armé de verres colorés convenablement choisis, en particulier de verres d'un vert intense, qui absorbent fortement la région du spectre transmise par le bichromate et laissent passer les rayons verts transmissibles au chromate neutre. J'ai pu aussi me servir avec avantage d'une solution concentrée de chlorure de nickel contenue dans une cuve à faces parallèles.

Mode opératoire. — Les échelles colorimétriques étant ainsi formées, on dispose, dans des tubes identiques et en même volume (10^{cc}), les mélanges de chromate neutre et d'acide dont on veut étudier le partage. Ces mélanges doivent être formés de telle manière que la richesse en acide chromique (sous forme de bichromate ou de chromate) y soit toujours la même et identique à celle des séries étalons. Leur teinte sera donc identique à l'un des tubes de l'échelle correspondante, ou comprise entre deux tubes consécutifs. Dans le premier cas, la proportion de bichromate libre contenu dans le mélange est indiquée par le numéro du tube; dans le second cas, nous saurons qu'elle est comprise entre deux valeurs très voisines, et, en prenant la moyenne, nous commettrons une erreur toujours petite.

Dans la série ($Cr^2O^6 = 4^{lit}$), l'erreur sera visiblement inférieure à $\frac{1}{200}$ pour les tubes 0 à 30, inférieure à $\frac{2}{200}$ pour les tubes 30 à 60, plus petite que $\frac{3}{200}$ de 60 à 90, inférieure à $\frac{5}{200}$ pour les deux derniers tubes.

Le tube à comparer est tout d'abord, par un examen rapide, classé dans une région déterminée de l'échelle : on procède ensuite à une comparaison plus attentive devant la glace dépolie, en s'aidant au besoin des verres colorés, comme il a été dit plus haut.

Toutes les déterminations, d'abord exécutées par moi-même, ont été contrôlées par plusieurs personnes, absolument étrangères aux recherches, qui ont eu seulement à se prononcer sur l'identité de deux nuances.

Représentation des résultats. — Les expériences ont toutes été rapportées à $10^{\text{éq}}$ de bichromate KCr^2O^7, mis en présence de $10^{\text{éq}}$ de potasse, et de $x^{\text{éq}}$ d'acide; x est un nombre connu à l'avance qui varie d'une expérience à l'autre. La dilution de cet acide est choisie de telle manière que le volume occupé par le mélange soit toujours le même, savoir, pour la première série, 40^{lit}; pour la seconde, 20^{lit}. Nous aurons le partage suivant :

$$10\,KO \text{ diss.} + 10\,KCr^2O^7 + x\,Ac$$

donnent

$$y(KO, Ac) + y\,KCr^2O^7 + (10 - y)(KO, KCr^2O^7) + (x - y)\,Ac.$$

Le coefficient y, proportion de bichromate libre dans le mélange, est mesuré par la méthode colorimétrique.

Si l'acide opposé au bichromate donne lieu à une combinaison totale, on aura

$$x - y = 0,$$

d'où

$$y = x,$$

pourvu toutefois que x ne soit pas supérieur à 10.

Les résultats seront, avec avantage, figurés graphiquement par des courbes obtenues en prenant pour abscisses le nombre x d'équivalents d'acide, pour ordonnées les valeurs trouvées pour y. L'emploi de ces courbes permet d'éliminer les erreurs accidentelles et de resserrer encore les limites d'incertitude que comporte la méthode suivie. Nous indiquerons, dans nos Tableaux de résultats, les moyennes trouvées à l'échelle colorimétrique et aussi les nombres calculés par interpolation ou par l'intermédiaire des courbes.

J'ai étudié de cette manière un certain nombre d'acides. Les acides insolubles ou donnant avec la potasse des sels insolubles ne pouvaient évidemment faire l'objet de telles recherches, par exemple les acides silicique, hydrofluosilicique et même perchlorique. J'ai dû également laisser de côté les acides qui réduisent le bichromate de potasse en s'oxydant à ses dépens : tels sont l'acide sulfureux, l'acide sulfhydrique, les acides phosphoreux ou arsénieux. Les acides organiques, acides tartrique, oxalique, citrique, pro-

duisent un effet analogue, mais la réaction est le plus souvent assez lente pour permettre de faire utilement des déterminations immédiates.

Toutes les expériences ont été faites au voisinage de 20°.

Les résultats obtenus seront exposés dans l'ordre suivant :

1° Acide chlorhydrique;
2° Acide acétique;
3° Acide trichloracétique;
4° Acide oxalique;
5° Acide sulfurique;
6° Acide citrique;
7° Acide orthophosphorique;
8° Phosphate diacide de potasse;
9° Acide carbonique;
10° Bicarbonate de potasse;
11° Acide borique.

1° *Acide chlorhydrique.*

Les prévisions thermiques rapportées aux hydrates solides assignent à l'acide chlorhydrique une fonction nettement prépondérante sur le bichromate. La différence des chaleurs dégagées est

$$28^{Cal},3 - 11^{Cal},9,$$

soit $+ 14^{Cal},4$. La grandeur de cette valeur positive nous autorise à prévoir que l'action de l'acide chlorhydrique sera totale, ou du moins que le partage, s'il existe, sera fort peu avancé.

Première série : $10(KO, KCr^2O^7) = 40^{lit}$. — On forme les tubes successifs en ajoutant à 5^{cc} de chromate neutre $(KO, KCr^2O^7 = 2^{lit})$ 5^{cc} d'un mélange d'eau et d'acide chlorhydrique, savoir :

		Eau.
5^{cc}	$(HCl = 2^{lit})$	$+ 0^{cc}$
4,5	»	+ 0,5
4	»	+ 1,0
...	»	.. ...
1	»	+ 4
5,0	»	+ 4,5
0,2	»	+ 4,8

Voici les résultats obtenus, rapportés aux notations indiquées plus haut :

x.	y trouvé.	Limite supérieure de l'erreur.	y calculé.
10......	9,75	0,25	9,75
9......	8,7	0,15	8,78
8......	8	Id.	7,80
7......	7	Id.	6,83
6......	5,9	0,1	5,85
5......	4,9	Id.	4,88
4......	3,6	Id.	3,90
3......	2,9	0,05	2,92
2......	2,1	Id.	1,95
1......	1,05	Id.	0,98
0,4....	0,4	Id.	0,39

Les valeurs de y diffèrent peu de celles qui sont fournies par l'équation

$$y = 0,98x,$$

ligne droite très rapprochée de la droite $y = x$ qui correspond à un déplacement total.

Seconde série : $10(KO, KCr^2O^7) = 20^{lit}$.

x.	y trouvé.	Limite d'erreur.	y calculé.	
10......	»	»	»	Le bichromate a cristallisé.
8......	»	»	»	
5......	5	0,25	4,8	
4......	3,75	Id.	3,9	
3......	2,85	0,05	2,9	
2......	1,95	Id.	1,95	
1......	1	Id.	0,98	

Les résultats sont sensiblement identiques à ceux de la première série : ils nous montrent que le déplacement du bichromate par l'acide chlorhydrique est sensiblement total, ainsi que M. Berthelot l'a vérifié par voie calorimétrique. La dilution ne produit guère d'effet sensible, du moins dans les conditions étudiées. Ici le phénomène est pleinement conforme aux prévisions thermiques : l'absence de sel acide de l'acide chlorhydrique, du moins en liqueurs étendues, est ici une condition favorable au déplacement total. La légère différence que fournissent les expériences doit être attribuée à une faible décomposition exercée par l'acide chlorhydrique sur le bichromate lui-même avec mise en liberté d'acide chromique.

2° *Acide acétique.*

Les valeurs thermiques indiquent, pour la mise en liberté du bichromate, dans l'état solide,

$$22^{Cal},3 - 11^{Cal},9,$$

valeur nettement positive et assez grande.

Première série (40^{lit}) :

x.	y trouvé.	Limite d'erreur	y rectifié.
0,8....	0,8	0,05	0,8
1......	1,0	Id.	1
2......	2,05	Id.	1,95
4......	4	0,1	3,9
6......	5,9	Id.	5,8
8......	7,4	0,15	7,35
10......	8,4	Id.	8,35
12......	8,9	Id.	8,8
14......	»	»	9,1
16......	9,25	0,25	9,2
18......	»	»	9,25
20......	9,25	0,25	9,3

Les valeurs de y reportées graphiquement forment une courbe hyperbolique tangente à l'origine à la droite d'action totale $y = x$, et ayant pour asymptote la droite $y = 10$, valeur qui serait évidemment fournie par l'emploi d'une quantité indéfinie d'acide acétique (*fig.* 1).

Nous voyons que, lorsqu'on oppose à $1^{éq}$ de potasse équivalents égaux de bichromate et d'acide acétique, le partage a lieu dans le rapport de 0,165 à 0,835.

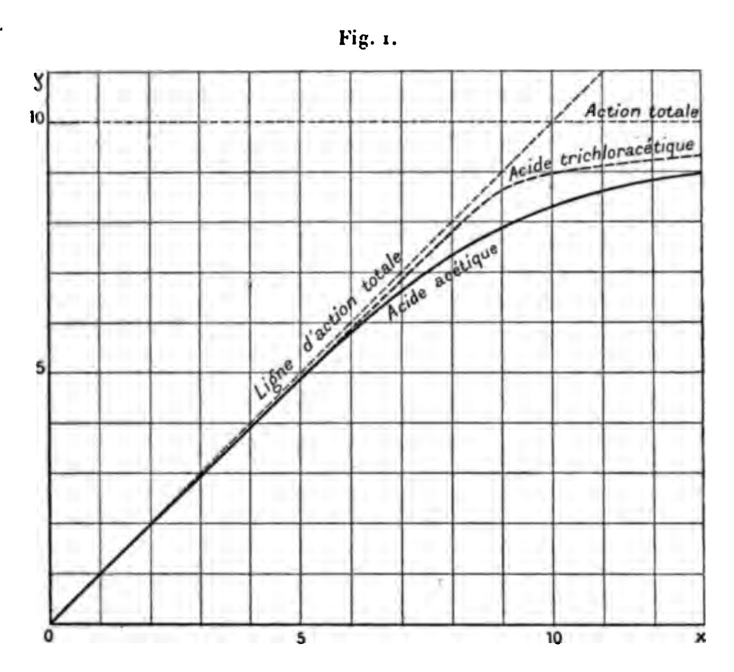
Seconde série (20^{lit}) :

x.	y trouvé.	Limite d'erreur.	y rectifié.	
1......	0,95	0,05	0,95	
2......	1,95	Id.	1,95	
4......	3,75	0,25	3,8	
6......	5,25	0,25	5,5	
8......	»	»	»	Le bichromate a cristallisé.
10......	»	»	»	Le bichromate a cristallisé.

Les résultats diffèrent peu de ceux de la première série : néanmoins, les valeurs de y paraissent être un peu plus faibles. Le déplacement du bichromate paraît donc moins avancé pour des liqueurs moins diluées : cette cir-

constance est très conforme à l'idée que nous pouvons nous faire de la cause même du partage, qui est vraisemblablement la production d'une certaine

Fig. 1.



dose d'acétate acide de potasse, destructible par la dilution et devant par cela même exister plus abondamment dans les dissolutions plus concentrées.

3° *Acide trichloracétique.*

Série unique : $10(KO, KCr^2O^7) = 40^{lit}$. — Les prévisions thermiques paraissent voisines de celles de l'acide acétique.

x.	y trouvé.	Limite d'erreur.	y rectifié.
1......	1	0,05	1
2......	2	Id.	1,95
4......	4	0,1	3,9
6......	5,9	Id.	5,85
8......	7,9	0,15	7,8
8,8....	8,6	Id.	8,55
10......	8,9	Id.	8,95
12......	9,25	0,25	9,2
16......	9,25	Id.	9,4
20......	9,5	Id.	9,55

La marche du partage est analogue à celle que nous a fournie l'acide acé-

tique. Les valeurs de y forment de même une courbe hyperbolique asymptote à $y = 10$, tangente à l'origine à la droite $y = x$ (courbe pointillée de la *fig.* 1).

La comparaison des deux courbes accuse nettement une prédominance d'action pour l'acide trichloracétique. M. Thomsen avait déjà constaté cette activité plus grande de ce dernier acide dans les partages salins, et les avidités relatives qu'il assigne à ces deux acides sont

Pour l'acide trichloracétique.........	0,36
Pour l'acide acétique...............	0,03

Celle-ci serait douze fois plus petite que la première. Ce résultat ne peut être conciliable avec les valeurs trouvées en opposant ces deux acides au bichromate.

L'action plus avancée qu'exerce l'acide trichloracétique provient de ce que le sel acide, cause principale du partage, est beaucoup moins stable et plus facilement dissociable par l'eau que l'acétate.

4° *Acide oxalique.*

Seconde série : $10(KO, KCr^2O^7) = 20^{lit}$. — Je prends pour x le nombre d'équivalents de fonction acide, soit 2 pour $C^4O^8H^2$.

x.	y trouvé.	Limite d'erreur.	y rectifié.	
1......	1	0,05	1	
2......	1,95	Id.	1,95	
4......	3,75	0,25	3,8	
6......	5,5	Id.	5,7	
8......	7,75	Id.	7,6	
10......	»	»	»....	Le bichromate a cristallisé.

Dans les limites considérées, y est voisin de

$$y = 0,98x,$$

ligne droite très rapprochée de la ligne d'action totale.

Les deux fonctions de l'acide oxalique agissent donc l'une et l'autre pour réaliser un déplacement à peu près total.

Première série (40^{lit}). — J'ai tenté d'effectuer un nombre plus considérable de mesures : pour des quantités d'acide inférieures à 8, nous retrou-

vons la même ligne droite. Pour des doses supérieures allant de 10 à 20, j'ai trouvé que l'acide oxalique est promptement oxydé avec dégagement lent de bulles de gaz acide carbonique, tandis que la liqueur brunit de plus en plus : cet effet, qui est instantané pour $x = 20$, rend impossible toute détermination. Nous retrouverons une cause analogue de perturbation, plus lente, il est vrai, en étudiant l'acide citrique.

5° *Acide sulfurique.*

Première série : $10(KO, KCr^2O^7) = 40^{lit}$. — x désigne le nombre d'équivalents de $SO^3 = 40^{gr}$ opposés au bichromate.

x.	y trouvé.	Limite d'erreur.	y rectifié.
0,4....	0,4	0,05	0,4
1......	1	Id.	1
2......	1,9	Id.	1,95
4......	3,9	0,1	3,9
6......	5,6	Id.	5,85
8......	7,9	0,15	7,8
8,8....	8,8	Id.	8,6
10......	9,75	0,25	9,75
11,2....	9,8	Id.	9,8
12......	9,8	Id.	9,85
16......	9,9	Id.	9,9
20......	10	Id.	10

On peut représenter les valeurs de y par deux droites : la première, relative aux $x < 10$, serait

$$y = 0,975x,$$

très peu écartée de la droite d'action totale ; l'autre, pour les valeurs de $x > 10$, presque confondue avec $y = 10$.

Les deux fonctions acides de S^2O^6 produisent donc en liqueur étendue le déplacement à peu près total du bichromate.

6° *Acide citrique.*

L'acide citrique ($C^{12}H^8O^{14} = 192^{gr}$) se comporte, dans les dissolutions, comme un acide tribasique à trois fonctions égales. Chaque équivalent de potasse dégage environ $12^{Cal},6$, valeur inférieure aux chaleurs de saturation des acides minéraux forts, mais supérieure à $11^{Cal},7$ que dégage le bichro-

mate avec la potasse. N'ayant pas les données thermiques pour l'état solide des citrates, nous ne pouvons appliquer rigoureusement à l'acide citrique le calcul relatif aux hydrates solides. Nous pouvons néanmoins prévoir qu'il indiquerait la prédominance de chaque fonction de cet acide sur le bichromate.

Première série : $10(KO.KCr^2O^7) = 40^{lit}$. — *m* représentant le nombre des molécules d'acide citrique $C^{12}H^8O^{14}$. *x* désigne le nombre d'équivalents fonctionnels $\frac{1}{3}(C^{12}H^8O^{14})$ (groupe monobasique); il est clair que

$$x = 3m.$$

m.	*x.*	*y* trouvé.	Limite d'erreur.	*y* rectifié.
0,2......	0,6	0,6	0,05	0,6
0,4......	1,2	1,3	Id.	1,2
»	2	»	»	1,95
1........	3	2,95	Id.	2,9
»........	4	»	»	3,85
2........	6	5,4	0,1	5,55
»........	8	»	»	7,2
3........	9	7,9	0,15	7,85
»........	10	»	»	8,45
4........	12	9,25	0,25	9,25
»........	14	»	»	9,5
5........	15	9,75	Id.	9,75

Pour des doses plus grandes d'acide citrique (*x* compris entre 15 et 30), je n'ai pu poursuivre utilement les comparaisons : la liqueur brunit plus ou moins vite par l'oxydation de l'acide citrique, réalisée aux dépens du chromate; l'effet est d'autant plus rapide que la proportion d'acide est plus grande.

Les valeurs de *y* sont figurées par une courbe hyperbolique, de même forme que pour l'acide acétique, tangente à l'origine à la ligne d'action totale (*fig.* 2).

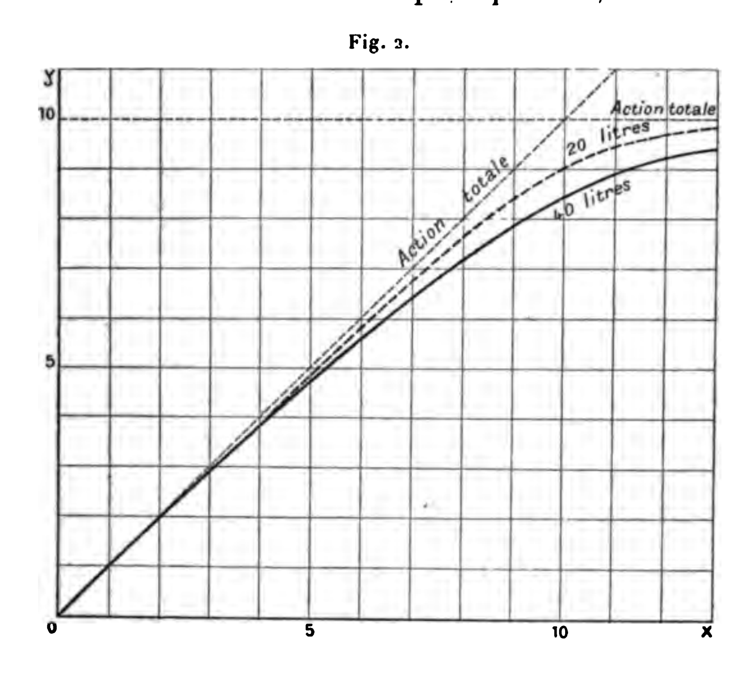
On voit que l'acide citrique se comporte comme un acide réellement tri-e et pourrait être comparé à un faisceau de trois acides analogues à acétique.

Seconde série (20[lit]) :

m.	*x.*	*y* trouvé.	Limite d'erreur.	*y* rectifié.
0,1......	0,3	0,3	0,05	0,3
0,2......	0,6	0,55	Id.	0,58
0,3......	0,9	0,75	Id.	0,86
0,5......	1,5	1,4	Id.	1,45
1........	3	2,95	Id.	2,9
1,5......	4,5	»	»	4,35
2........	6	5,5	0,25	5,75
2,5......	7,5	7,5	Id.	7,2
3........	9	»*	»	8,4
»........	10	»*	»	9
3,5......	10,5	9,25*	0,25	9,25
4........	12	9,5*	Id.	9,6
4,5......	13,5	9,75*	Id.	9,75
5........	15	10*	Id.	9,8

Pour tous les cas désignés par un astérisque, il s'est déposé dans la liqueur des cristaux de bichromate : on a pu, cependant, effectuer des déter-

Fig. 2.



minations en opérant immédiatement après la formation du mélange, grâce à l'élévation de température qui en résultait (une légère cause d'erreur pouvait provenir de cette dernière circonstance).

Les valeurs de y fournies par cette seconde série donnent une courbe hyperbolique analogue, mais indiquant un déplacement plus avancé (*fig.* 2).

Pour équivalents égaux de potasse, de bichromate et d'acide citrique ($\frac{1}{3}C^{12}H^8O^{14}$), il subsiste dans la première série 0,155, dans la seconde 0,1 environ de potasse unie au bichromate.

La dilution tend donc, dans le cas actuel, à diminuer l'étendue du déplacement.

7° *Acide orthophosphorique.*

Les trois fonctions de l'acide orthophosphorique PhO^8H^3 s'exercent d'une manière très inégale. Ces différences, fort notables dans les dissolutions, deviennent encore plus visibles quand on considère les réactions dans l'état solide hydraté. On trouve ainsi que

		Cal
PhO^8H^3, HO sol. + KO, 5HO sol.	= PhO^8H^2K sol. + 7HO sol. (1).	+ 24,4
PhO^8H^3, HO sol. + 2ᵉ équiv.	= sol. (2)	+ 5,5
PhO^8H^3, HO sol. + 3ᵉ équiv.	= sol. (3)	+ 0

Nous sommes donc conduits à penser que la première des fonctions de l'acide orthophosphorique (mesurée par $24^{Cal},4$) est supérieure, vis-à-vis de la potasse, à la fonction acide du bichromate mesurée par $11^{Cal},9$. La différence $24^{Cal},4 - 11^{Cal},9$, soit $12^{Cal},5$, est positive et fort grande.

La seconde fonction est mesurée par un nombre un peu supérieur à $5^{Cal},5$, et visiblement du même ordre que le bichromate, quoique paraissant plus faible.

Quant à la troisième, mesurée par un effet thermique voisin de zéro, elle est, à coup sûr, très inférieure à la fonction acide du bichromate de potasse.

S'il en est ainsi, l'acide orthophosphorique mis en présence du chromate neutre de potasse devra sans doute manifester seulement deux fonctions acides, l'une forte, comparable à celle de l'acide chlorhydrique, l'autre faible, analogue au bichromate lui-même.

Première série : $10(KO, KCr^2O^7) = 40^{lit}$. — *m* représente le nombre

(1) La chaleur de dissolution du phosphate acide de potasse est, d'après mes mesures, à 21° de $-4^{Cal},6$ pour $1^{éq}$ $KH^2PhO^8 = 136^{gr}$. Graham avait indiqué $-4,8$.

(2) En admettant pour la chaleur de dissolution du phosphate dipotassique KH^2PhO^8 le même nombre $+5,6$ que pour le sel de soude, valeur qui est sans doute trop forte : la quantité de chaleur 5,5 doit donc probablement être trop petite.

(3) En admettant pour la chaleur de dissolution du phosphate tribasique le même nombre $+17,4$ que pour la soude.

d'équivalents de $PhO^8H^3 = 98^{gr}$, opposés à $10(KCr^2O^7)$:

m.	*x*.	*y* trouvé.	Limite d'erreur.	*y* rectifié.
0,2......	0,4	0,4	0,05	0,4
0,4......	0,8	0,75	Id.	0,78
1........	2	1,95	Id.	1,95
2........	4	3,5	0,1	3,5
3........	6	4,6	Id.	4,8
4........	8	5,95	Id.	5,95
5........	10	7,15	0,15	7,1
6........	12	8,15	Id.	8,1
7........	14	8,85	Id.	8,9
8........	16	9,75	0,25	9,75
9........	18	9,75	Id.	9,85
10........	20	10	Id.	10

Si nous considérons les valeurs de y fournies par de petites quantités d'acide, nous remarquons que l'on a

$$y = 2m:$$

$m^{éq}$ de PhO^8H^3 déplacent donc $2m^{éq}$ de bichromate. Si nous désignons par x le nombre réel d'équivalents de fonction acide monobasique qui interviennent dans la réaction, nous aurons

$$y = x;$$

donc

$$x = 2m.$$

L'acide phosphorique se comporte comme un faisceau de deux acides monobasiques.

Rapportée aux x ainsi définis, la courbe des y est voisine d'un arc d'hyperbole qui est tangent à l'origine à la ligne droite d'action totale $y = x$ et admet pour asymptote la droite $y = 10$ (*fig.* 3).

En opposant équivalents égaux de potasse, de bichromate et d'acide orthophosphorique PhO^8H^3, ce dernier s'empare sensiblement de toute la base ($m = 10$ ou $x = 20$).

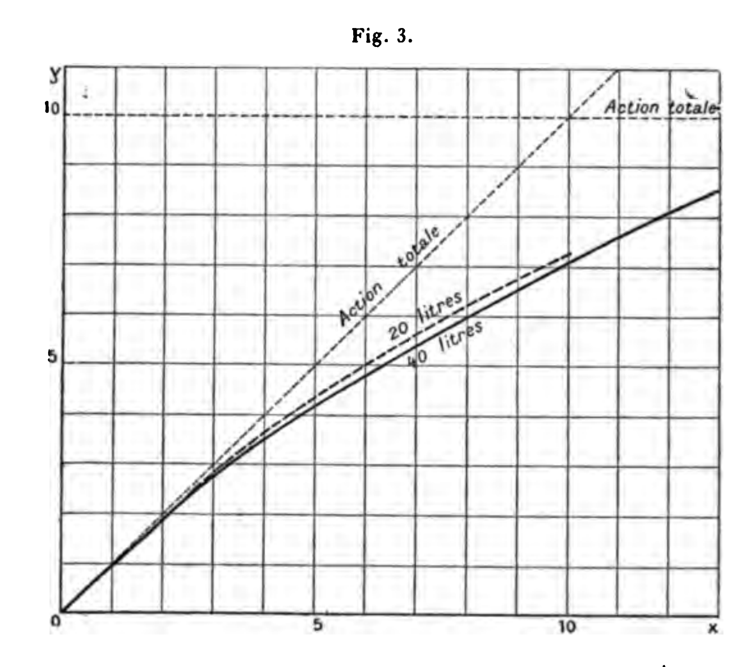
Seconde série : $10(KO, KCr^2O^7) = 20^{lit}$. — m et x désignent, comme ci-dessus, le nombre d'équivalents d'acide orthophosphorique, et le nombre d'équivalents de fonctions acides opposables au bichromate

$$x = 2m,$$

m.	x.	y trouvé.	Limite d'erreur.	y rectifié.
0,1......	0,2	0,2	0,05	0,2
0,2......	0,4	0,4	Id.	0,4
0,5......	1	0,95	Id.	0,95
1........	2	1,95	Id.	1,9
1,5......	3	2,95	Id.	2,8
2........	4	3,5	0,25	3,6
2,5......	5	4,25	Id.	4,35
3........	6	5	Id.	5
3,5......	7	5,75	Id.	5,6
4........	8	6,5	Id.	6,2
4,5......	9	6,75	Id.	6,7
5........	10	7	Id.	7,2

Ces résultats donnent une courbe analogue à celle de la première série (courbe ponctuée de la *fig.* 3), mais paraissant indiquer un déplacement un

Fig. 3.



peu plus avancé; ici, comme dans le cas de l'acide citrique, la dilution tend à diminuer la valeur du déplacement.

L'effet produit par l'acide orthophosphorique provient, comme on l'a vu, des deux premières fonctions de cet acide. Tout nous conduit à les considérer comme très inégales : il importe donc autant que possible de définir leur action particulière dans l'effet total. C'est ce que nous allons faire dans ce qui suit.

8° *Phosphate diacide de potasse, ou deuxième fonction de l'acide phosphorique.*

Les prévisions thermiques nous ont amenés à croire que la première fonction de l'acide orthophosphorique est comparable à celle de l'acide chlorhydrique : opposée au chromate neutre de potasse, elle donnerait donc une action voisine du déplacement total. En désignant par x le nombre d'équivalents de cette première fonction, on aurait sensiblement (pour $x < 10$)

$$y' = 0,98x.$$

Ceci posé, nous pourrons déduire l'effet de la deuxième fonction.

Considérons le mélange

$$m\,PhO^8H^3 + 10(KO, KCr^2O^7).$$

La première fonction acide, supposée s'exerçant seule et la première, éliminera une dose de bichromate représentée par

$$y'_m = 0,98m.$$

Il reste dans la liqueur $(10 - y'_m)^{éq}$ de chromate neutre non détruit, sur lesquels vont agir les $m^{éq}$ de la deuxième fonction acide; il en résulte le déplacement d'une quantité nouvelle de bichromate

$$y_m - y'_m,$$

y_m quantité totale évaluée par les mesures du § 7.

C'est comme si nous faisions agir sur $10(KO, KCr^2O^7)$

$$\frac{m \times 10}{10 - y'_m}$$

équivalents de la deuxième fonction acide, qui vont déplacer

$$y''_m = \frac{10(y_m - y'_m)}{10 - y'_m}$$

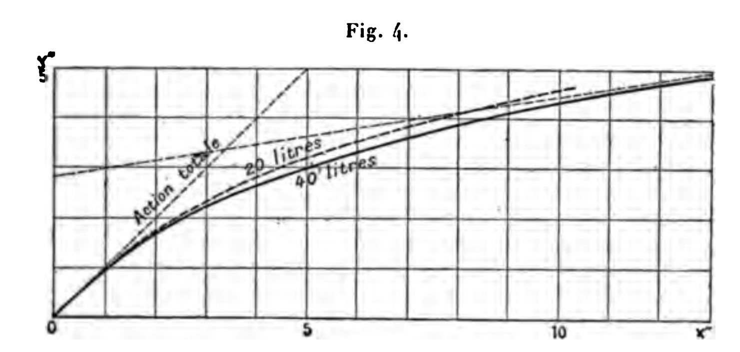
de bichromate.

Donc, en rapportant toujours à $10(KO, KCr^2O^7)$, nous trouvons que

$$x'' = \frac{10m}{10 - 0,98m}$$

La courbe des y'' est voisine de la précédente (courbe pointillée de la *fig.* 4). Cependant, ainsi que nous pouvions le prévoir, d'après les résultats

Fig. 4.



d'ensemble de l'acide orthophosphorique, les valeurs de la seconde série (liqueurs moins diluées) correspondent à un déplacement plus avancé du bichromate.

Étude directe du phosphate diacide. — Il importait de vérifier les déductions précédentes par une étude directe du phosphate diacide de potasse. Ce dernier peut être obtenu en beaux cristaux quadratiques, dont j'ai mesuré la chaleur de dissolution (voir ci-dessus, note). On peut, à partir du sel cristallisé, obtenir des liqueurs titrées très bien définies, auxquelles on appliquera la méthode de recherches, en les opposant au chromate neutre de potasse.

Si nous désignons encore par x'' le nombre d'équivalents de PhO^8KH^2, opposés à $10KCr^2O^7$ et $10KO$, nous avons obtenu les résultats qui suivent.

Série unique $[10(KO, KCr^2O^7) = 40^{lit}]$:

x''.	y'' trouvé.	Limite d'erreur.	y'' rectifié.
5......	3,1	0,1	3,0
4......	2,7	0,05	2,65
3,95...	2,65	Id.	2,65
3......	2,3	Id.	2,2
2......	1,7	Id.	1,66
1,97...	1,65	Id.	1,65
1......	0,95	Id.	0,95
0,5....	0,5	Id.	0,5

Le phosphate acide n'utilise qu'une seule fonction acide. Les nombres trouvés sont d'ailleurs sensiblement identiques avec ceux déduits plus haut par le calcul des résultats de l'acide orthophosphorique.

Cette coïncidence confirme l'hypothèse que nous avions faite relativement

à la nature de la première fonction de cet acide, qui est bien réellement comparable à celle de l'acide chlorhydrique. La deuxième fonction est visiblement de l'ordre de celle du bichromate et donne, avec ce dernier, un partage qui serait plutôt favorable au bichromate.

Quant à la troisième fonction, elle est sans aucun effet sensible sur la potasse, vis-à-vis du bichromate.

9° *Acide carbonique.*

M. Berthelot a établi la prépondérance de la première fonction de l'acide carbonique qui fournit le bicarbonate. Dans l'état solide, nous avons

$$C^2O^4 \text{ sol.} + KO, 5HO \text{ sol.} = KHC^2O^6 \text{ sol.} + 4HO \text{ sol. dégage....} \quad +18^{Cal},8.$$

L'action consécutive de la potasse sur le bicarbonate (deuxième fonction de C^2O^4) donne seulement

$$KHC^2O^6 \text{ sol} + KO, 5HO \text{ sol.} = (KO, CO^2)^2 \text{ sol.} + 6HO \text{ sol.....} \quad + 6^{Cal},2.$$

La fonction du bichromate vient se placer, d'après les indications thermiques, entre les deux fonctions de l'acide carbonique. L'étude des réactions qu'on obtient en opposant ces deux acides vis-à-vis de la potasse présente donc un grand intérêt.

La faible solubilité de l'acide carbonique dans l'eau ne permet pas de préparer à l'avance des solutions connues de ce corps, qu'on ferait ensuite réagir sur le chromate neutre. J'ai dû opérer en faisant arriver à saturation le gaz carbonique pur dans une liqueur titrée de chromate neutre

$$10(KO, KCr^2O^7) = 40^{lit}.$$

Premier essai. — 20^{cc} de chromate neutre, à une température voisine de $20°$, ont fixé $0^{gr},144$ d'acide carbonique, soit, pour $10(KO, KCr^2O^7)$, sensiblement $6^{éq},5$ de C^2O^4, ($C^2O^4 = 44^{gr}$).

L'examen colorimétrique a montré que $4^{éq},8$ de bichromate étaient devenus libres.

Si la transformation a fourni du bicarbonate, la réaction sera

$$10(KO, KCr^2O^7) + 6,5\,C^2O^4 = \left\{ \begin{array}{l} \quad 4,8\,KCr^2O^7 \\ + \ 5,2(KO, KCr^2O^7) \\ + \ 4,8(KO, C^2O^4) \\ + \ 1,7\,C^2O^4 \end{array} \right.$$

1,7 C^2O^4 dans 40^{lit} correspondent à $1^{gr},88$ par litre. Or la liqueur saturée d'acide carbonique à 20° contiendrait par litre $1^{gr},77$, valeur fort peu différente [1].

Deuxième essai. — 40^{cc} de chromate neutre, au voisinage de 20°, ont fixé $0^{gr},264$ d'acide carbonique, soit, pour $10(KO, KCr^2O^7)$, environ $6C^2O^4$.

L'essai colorimétrique indique $4^{éq},6$ de bichromate libre. Il doit donc rester $1^{éq},4$ de C^2O^4 libre, soit par litre $1^{gr},5$, valeur peu éloignée de la teneur de saturation.

Nous voyons donc que la réaction semble bien réellement donner du bicarbonate de potasse, peu dissocié en présence d'un excès d'acide carbonique. L'acide carbonique ne paraît donc intervenir que par sa première fonction.

En mélangeant la liqueur obtenue plus haut avec des volumes connus de chromate neutre, on réalise des systèmes contenant des proportions connues d'acide carbonique.

Le Tableau suivant résume les résultats obtenus, ainsi que ceux qui précèdent :

x.	y trouvé.	Limite d'erreur.	y rectifié.
6,5....	4,8	0,1	4,8
6......	4,6	Id.	4,5
4,5....	3,65	Id.	3,6
3......	2,5	0,05	2,5
1,5....	1,35	Id.	1,35

Ces valeurs donnent à la représentation graphique une courbe qui est visiblement tangente à l'origine à la ligne d'action totale $y = x$, bien que s'écartant assez promptement de cette droite (*fig.* 5).

Cet effet peut être regardé comme dû en presque totalité à la première fonction de l'acide carbonique, qui donne le bicarbonate, car on verra plus loin que la deuxième fonction (celle du bicarbonate) n'exerce sur le chromate neutre qu'une action fort petite.

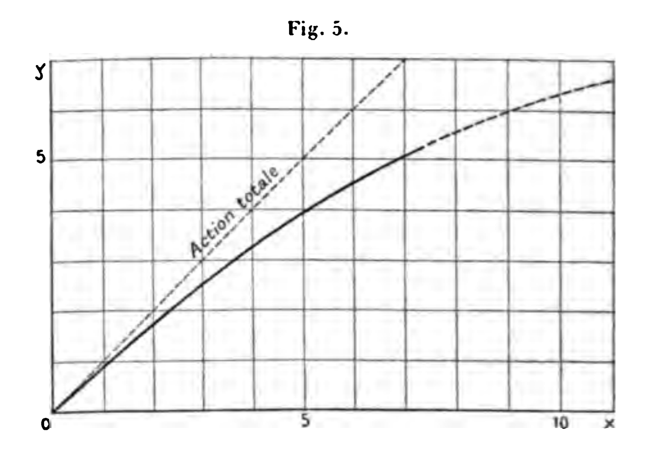
L'action est ici plus avancée qu'avec la deuxième fonction de l'acide phosphorique, conformément aux analogies thermiques.

---

(1) Nous admettons que la solubilité du gaz est la même que pour l'eau, ce qui n'est pas tout à fait vrai.

M. Berthelot, par la méthode calorimétrique, a trouvé que $10C^2O^4$ agissant sur $10(KO, KCr^2O^7)$ déplacent environ la moitié du bichromate; en

Fig. 5.



prolongeant la courbe, nous arrivons pour ce cas, à peu près, à $6^{éq}$ de bichromate mis en liberté. La concordance est aussi complète que possible.

10° *Bicarbonate de potasse, ou deuxième fonction de l'acide carbonique.*

La deuxième fonction de l'acide carbonique est désignée par les indications thermiques de l'état solide comme inférieure à celle du bichromate.

L'expérience vérifie ces prévisions; l'action du bicarbonate de potasse sur le chromate neutre est extrêmement petite, ainsi que l'établissent les résultats ci-après :

x désignant le nombre d'équivalents de bicarbonate HKC^2O^6, opposés à $10(KO, KCr^2O^7)$, le tout dissous dans 40^{lit} d'eau, nous avons trouvé pour y (dose de bichromate devenu libre) :

x.	y trouvé.	Limite d'erreur.
20.................	0,15	0,05
16.................	0,1	Id.
12.................	0,05	Id.
8.................	0,05	Id.
4.................	0,0	Id.
1.................	0,0	Id.

La réaction est à peu près insensible, et doit être rapportée aux dissociations que subissent dans les dissolutions étendues le bicarbonate et le chromate neutre.

On pourra donc aisément ramener le bichromate à l'état de chromate neutre, en l'additionnant de carbonate de potasse, qui se transforme ainsi en bicarbonate.

11° *Acide borique.*

M. Berthelot a été conduit à considérer l'acide borique comme un acide faible : cette nature se manifeste principalement par la forte décomposition que la dilution exerce sur les solutions des borates alcalins et surtout ammoniacaux. Les données thermiques, relatives à la formation des borates de potasse, sont trop incomplètes pour servir de base à une prévision rigoureuse des phénomènes. Si l'on pouvait appliquer à la potasse les nombres déterminés pour la soude, on trouverait pour la production du biborate dans l'état solide un dégagement de chaleur d'environ 15^{Cal}. Cette valeur paraît beaucoup trop considérable, et l'expérience seule pourra nous indiquer quelle est l'action exercée par l'acide borique sur le chromate neutre.

La faible solubilité de l'acide borique ne permettant pas d'obtenir de liqueur plus riche que ($1^{éq} = 4^{lit}$), j'ai effectué un certain nombre de déterminations en dissolvant directement dans le chromate neutre ($KO, KCr^2O^7 = 4^{lit}$) des poids connus et convenablement choisis d'acide borique pur. J'ai pu ainsi dissoudre jusqu'à $1^{éq}$ de $Bo^2O^6 = 70^{gr}$, pour $1^{éq}$ de chromate neutre ($194^{gr},4$).

Voici les résultats obtenus pour

$$10(KO, KCr^2O^7) = 40^{lit},$$

x représentant le nombre d'équivalents de Bo^2O^6 opposés à 10^{eq} de bichromate :

x.	y trouvé.	Limite d'erreur.	y rectifié.
0,25....	0,05	0,05	0,05
0,5.....	0,1	Id.	0,075
0,75....	0,15	Id.	0,11
1.......	0,15	Id.	0,15
1,25....	0,15	Id.	0,20
1,5.....	0,2	Id.	0,25
1,75....	0,25	Id.	0,27
2.......	0,3	Id.	0,3
2,25....	0,35	Id.	0,35
2,50....	0,4	Id.	0,4
5.......	0,75	Id.	0.75
6.......	0,95	Id.	0,95
8.......	1,35	Id.	1,3
10.......	1,7	Id.	1,6

Les valeurs de y sont fort petites : elles peuvent être sensiblement figurées par une droite très voisine de Ox

$$y = 0,15x.$$

Nous voyons que la quantité de bichromate déplacé est sensiblement proportionnelle à la dose d'acide borique.

La réaction examinée de plus près paraît avoir un caractère assez complexe. Quand on dissout dans $1^{éq}$ de chromate (KO, KCr^2O^7), $1^{éq}$ d'acide borique cristallisé $Bo^2O^6, 3H^2O^2$, on voit les cristaux de ce dernier disparaître peu à peu, puis tout à coup se transformer en une poussière cristalline blanche, qui ne se redissout que par l'agitation prolongée, grâce au réchauffement du liquide. Ce précipité temporaire est un borate potassique très acide, fort peu soluble; il se redissout avec accroissement de la dose de bichromate libre.

Sa formation est prédominante et ne peut être compensée par une redissolution totale lorsque la quantité d'acide borique est plus grande que celle indiquée plus haut.

Quand on agite la solution du chromate neutre avec un grand excès de cristaux d'acide borique, on obtient un déplacement très avancé du bichromate, en même temps qu'il se forme beaucoup de borate acide à peu près insoluble. Dans un essai, la réaction a donné $8^{éq},5$ (sur 10) de bichromate libre.

Il n'est pas difficile de concevoir le mécanisme du phénomène, qui est ici déterminé par la précipitation du borate acide de potasse. Au début, l'acide borique dissous produit une légère décomposition du chromate neutre en bichromate et biborate soluble : ce dernier se transforme en borate acide et se précipite. Un nouveau partage a lieu qui aboutit de même à une précipitation de borate, et ainsi de suite. La réaction serait ainsi totale, si le borate était tout à fait insoluble : en réalité, elle est limitée par la légère solubilité du borate acide, sur lequel le bichromate exerce une action inverse.

IV. — Conclusions.

I. Nous avons été amenés dans ce qui précède à considérer le bichromate de potasse comme un corps doué d'une véritable fonction acide, intermédiaire entre les acides forts et l'acide borique.

Les actions réciproques exercées sur la potasse par le bichromate et les

divers acides ont réellement lieu dans le sens indiqué par les prévisions thermiques, surtout si ces dernières sont rapportées à l'état solide et hydraté des corps mis en présence.

Les acides forts, caractérisés par un grand dégagement de chaleur dans leur union avec la potasse, donnent en général un déplacement très avancé: tel est le cas de l'acide chlorhydrique, à côté duquel il faut certainement ranger l'acide azotique. L'acide sulfurique donne des résultats analogues, mais d'une interprétation plus délicate, à cause de la destruction partielle qu'il exerce sur le bichromate avec mise en liberté d'acide chromique.

La première fonction de l'acide orthophosphorique doit être rapprochée des acides les plus forts.

La chaleur de combinaison avec la potasse est un peu plus faible pour l'acide acétique, et cette circonstance se traduit visiblement par un déplacement moins avancé, qui donne lieu à un partage caractérisé. L'acide trichloracétique agit un peu plus fortement. Quant aux trois fonctions égales de l'acide citrique, elles diffèrent peu de l'acide acétique.

La première fonction de l'acide carbonique, la seconde fonction de l'acide orthophosphorique sont du même ordre de grandeur que celle du bichromate, et donnent lieu à des partages fort nets.

La deuxième fonction de l'acide carbonique, la troisième de l'acide phosphorique sont à coup sûr inférieures au bichromate, et demeurent à peu près sans effet vis-à-vis du chromate neutre. Quant à l'acide borique, sa fonction paraît être nettement au-dessous du bichromate : la légère action qu'on observe sur le chromate provient sans doute de la légère dissociation de ce sel en liqueur étendue, et surtout de la formation de borates très acides faciles à dissocier.

La *fig.* 6, qui reproduit les plus caractéristiques des courbes de partage ([1]), permet de se rendre un compte exact de la diversité d'allure des divers acides opposés au bichromate et à la potasse.

En se bornant à considérer le cas d'équivalents égaux de bichromate, d'acide antagoniste et de potasse ($x = 10$ sur la figure), nous voyons que l'équivalent unique de base se distribue de la manière suivante :

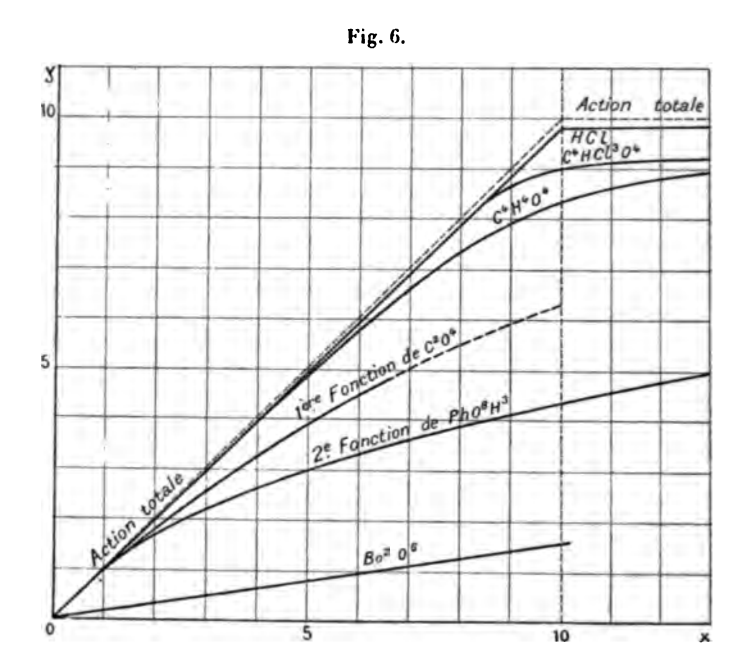
Acide chlorhydrique	0,98
Acide trichloracétique	0,895

([1]) Pour la série : $10(KO, KCr^2O^7) = 40^{lit}$.

Acide acétique................................	0,835
Acide citrique $\frac{1}{3}$($C^{12}H^8O^{14}$)....................	0,845
Acide carbonique..............................	0,63 (1)
Deuxième fonction d'acide orthophosphorique..	0,435
Acide borique Bo^2O^6..........................	0,16

le reste de la potasse demeurant combiné au bichromate.

Fig. 6.



La dilution intervient le plus généralement pour diminuer la valeur du déplacement du bichromate. Elle favorise ainsi la combinaison de la potasse avec l'acide le plus faible : c'est le cas de l'acide citrique, et aussi de la deuxième fonction de l'acide phosphorique.

II. Un résultat général et très important se dégage des expériences.

Toutes les fois que la fonction de l'acide, mesurée par les données thermiques de l'état solide, l'emporte sur le bichromate, *cette prédominance se traduit par l'action totale qu'une petite quantité d'acide exerce sur le chromate neutre.*

Les actions secondaires qui substituent au déplacement total théorique

(1) Courbe prolongée.

un partage plus ou moins avancé sont alors sans influence notable. Cette circonstance se révèle visiblement dans la représentation graphique du partage : toutes les courbes fournies par de tels acides sont tangentes à l'origine à la ligne d'action totale $y = x$.

On a ainsi le moyen de connaître immédiatement *combien chaque acide employé possède de fonctions supérieures à la fonction acide du bichromate,* ou, en d'autres termes, quelle est vis-à-vis du bichromate la basicité effective de cet acide.

Il suffit pratiquement de faire agir sur 10^{éq} de (KO, KCr^2O^7) une petite quantité de l'acide à étudier, xM, M étant la molécule d'acide (par exemple PhO^8H^3 ou $C^{12}H^8O^{14}$), x étant un nombre inférieur à 2. La méthode colorimétrique indique l'étendue y du déplacement, qui correspond à l'utilisation totale de xn équivalents d'acide, n étant le nombre cherché de fonctions supérieures au bichromate; on aura donc

$$y = nx,$$

d'où l'on déduit n.

On trouve ainsi 3 pour l'acide citrique, 2 pour l'acide orthophosphorique, 1 seulement pour l'acide carbonique C^2O^4, zéro pour l'acide borique Bo^2O^6. En réalité, pour ce dernier, on serait conduit à $n = 0,16$, ce qui, pour ramener à $n = 1$, obligerait à sextupler la formule de l'acide borique et à prendre $Bo^{12}O^{36}$: mais il vaut mieux admettre que l'acide borique est inférieur au bichromate et que dès lors la règle ne peut être appliquée.

Nous retrouvons ici la vérification du principe général des petites masses, énoncé par M. Berthelot (*Mécan. chim.*, II, 80, 254, 613) : *Si, dans un système, l'un des composants se trouve en dose très petite et seule variable, il agit proportionnellement à sa masse et tend vers une action totale.*

L'action de petites quantités d'acide est donc rigoureusement conforme aux prévisions thermiques déduites de l'état solide : *c'est une vérification éclatante de ce mode de prévision.*

III. Quant à la notion d'*avidité* que M. Thomsen a voulu instituer, elle est certainement incompatible avec les résultats qui précèdent. Il n'est pas admissible que le partage soit uniquement réglé par ces coefficients, qui seraient indépendants des phénomènes thermiques, alors que nous trouvons

une concordance absolue entre les phénomènes et les prévisions fondées sur les principes thermochimiques. Ceux-ci, nous l'avons vu, indiquent parfaitement dans tous les cas possibles le sens dominant du déplacement, qui est fréquemment transformé par des actions secondaires en partage plus ou moins avancé, mais qui demeure total pour de petites quantités d'acide.

CONTRIBUTION

A LA

THÉORIE DES ORBITES INTERMÉDIAIRES,

PAR M. H. ANDOYER,

Aide-Astronome à l'Observatoire,
Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Toulouse.

INTRODUCTION.

La loi de la gravitation universelle, énoncée par Newton, avait donné aux géomètres le moyen de calculer à l'avance le mouvement des corps célestes avec une approximation qui ne pouvait être limitée que par l'imperfection des observations. L'absolue généralité de cette loi fut longtemps combattue : le plus rude coup lui fut porté par Clairaut. Cet illustre géomètre venait d'aborder, le premier, le problème des trois corps; il appliqua immédiatement sa solution à l'étude du mouvement de la Lune. Son attention se porta principalement sur le mouvement séculaire du périgée, qui, comme l'indiquaient les observations, exécute une révolution complète en neuf ans environ. Le résultat du calcul de Clairaut (1) fut que le périgée de l'orbite lunaire devait, en admettant la loi de Newton, exécuter une révolution en dix-huit ans : son mouvement théorique était donc la moitié de celui qui résultait des observations. En même temps que Clairaut, Euler et d'Alembert arrivaient, par des procédés différents, aux mêmes conclusions (2). Disons tout de suite, sans qu'il soit nécessaire de rappeler comment Clairaut avait modifié la loi de Newton, que, moins de deux ans après, il reconnut publiquement qu'il avait été induit en erreur par un

(1) *Histoire de l'Académie royale des Sciences pour l'année* 1745; Paris.

(2) *Id.*

calcul trop sommaire, et qu'une étude plus approfondie démontrait, au contraire, le parfait accord de la théorie newtonienne avec les observations.

Les immortels travaux de Lagrange et de Laplace achevèrent de mettre cette affirmation complètement hors de doute, et, s'il s'est présenté des cas où l'accord entre la théorie et l'observation n'a pu être réalisé, on a, non pas modifié la loi de l'attraction, mais supposé l'existence de nouvelles forces qui agiraient concurremment. Et d'ailleurs, dans ces cas singuliers, peut-être l'hypothèse d'un milieu résistant ou l'application de la loi de Weber ne sont-elles que des moyens artificiels qui permettent de tourner des difficultés analytiques en présence desquelles les méthodes ordinaires de la théorie des perturbations se trouvent en défaut. Ce point de vue nouveau serait d'autant plus acceptable que les récents travaux de M. Poincaré permettent de supposer, comme l'avait déjà fait M. Weierstrass, qu'il existe des cas où la légitimité des procédés habituels de la Mécanique céleste peut être mise en doute, du moins s'il s'agit d'intervalles de temps très considérables.

Si, comme nous venons d'en entrevoir la possibilité, il se présente des difficultés que les théories actuelles sont impuissantes à résoudre, il faut, de toute nécessité, supposer que les approximations successives, qui sont censées conduire à la solution, ne sont pas convergentes. La première de ces approximations est obtenue en négligeant complètement les forces perturbatrices; l'orbite correspondante est l'ellipse de Kepler. Si l'on prend cette ellipse pour point de départ des approximations, si, en outre, comme on le fait d'habitude, ces approximations sont ordonnées par rapport aux puissances croissantes des masses perturbatrices, forme-t-on nécessairement une suite qui converge vers la véritable solution? en d'autres termes, peut-on pousser la théorie assez loin pour que les différences entre les coordonnées véritables de l'astre et celles que l'on déduit du calcul puissent devenir et rester aussi petites qu'on le veut? Telle est la question que s'est posée M. Gyldén, et qu'il a résolue par la négative.

C'est donc une nouvelle méthode qui devient nécessaire pour étudier le mouvement des corps célestes. Quel en sera le principe? C'est Clairaut lui-même qui nous l'indique lorsqu'il dit : « Il faut donc choisir pour première équation de l'orbite lunaire quelque équation qui ne s'écarte jamais considérablement de la vraie. Pour faire ce choix, je remarque que, au lieu de l'équation $\frac{p}{r} = 1 - e \cos U$, qui exprime l'ellipse primitive, si l'on prend

$\frac{p}{r} = 1 - e \cos m \mathrm{U}$, on aura l'équation d'une courbe formée en faisant mouvoir une ellipse autour de son foyer, en telle sorte que son apside décrive un angle qui soit à celui que la planète parcourt dans cette ellipse comme $1 - m$ à $1 \ldots$ ».

Ces lignes, quoique écrites sous l'influence de cette idée que la loi de Newton ne suffit pas à expliquer les apparences des phénomènes célestes, semblent contenir en germe la méthode de M. Gyldén. Voici, en effet, ce qui caractérise cette méthode : pour servir de base aux approximations successives, M. Gyldén choisit, et cela suivant les cas, une courbe représentant le mouvement réel de l'astre considéré d'une façon plus approchée que l'ellipse de Kepler. Cette courbe est nommée *orbite intermédiaire*.

Faire voir comment M. Gyldén a été conduit à rejeter l'ellipse de Kepler comme première approximation; par quelles considérations peut être motivé, dans chaque cas particulier, le choix d'une orbite intermédiaire; comment on peut avoir égard aux termes les plus considérables de la fonction perturbatrice, et cela en évitant le développement par rapport aux puissances de la masse perturbatrice, tel est, en quelques mots, le but de ce travail.

Je dois ajouter que, au lieu de prendre pour point de départ les équations de M. Gyldén, qui ont la plus grande analogie avec celles de Hansen, j'ai pris celle que Laplace établit au Chapitre II du second Livre de la *Mécanique céleste*.

Le premier Chapitre est consacré aux méthodes qui servent à former les équations de l'orbite intermédiaire dans le cas le plus général : le développement de la fonction perturbatrice y trouve sa place; comme application, je donne, à la fin de ce Chapitre, les équations de l'orbite intermédiaire de la Lune.

Dans le deuxième Chapitre, je traite un cas particulier intéressant et sur lequel M. Gyldén a fait de nombreuses recherches : c'est celui dans lequel la fonction perturbatrice est supposée fonction du seul rayon vecteur; comme application, les formules données depuis longtemps par M. Tisserand, pour déterminer le mouvement des apsides des satellites inférieurs de Saturne sous l'influence de l'aplatissement de la planète et sous l'action de l'anneau, y sont retrouvées par une voie essentiellement différente.

Le Chapitre III est consacré à l'exposition des méthodes d'intégration propres aux équations établies dans le premier Chapitre.

Enfin, dans un dernier Chapitre, je détermine, avec une approximation très rapide, l'orbite intermédiaire de la Lune; les inégalités séculaires du mouvement du nœud et du périgée de l'orbite lunaire s'y trouvent déterminées avec une grande précision; quant aux grandes inégalités périodiques de la longitude, elles se retrouvent avec une erreur relative qui ne dépasse pas un dixième. La comparaison des résultats obtenus avec la théorie de Laplace fait d'ailleurs prévoir qu'une seconde approximation serait suffisante pour conduire à des Tables de la Lune aussi précises que celles que l'on trouve dans la *Mécanique céleste*.

CHAPITRE I.

1. Considérons trois corps célestes, que nous supposerons réduits à leurs centres de gravité : l'un d'eux étant considéré comme corps central, nous prendrons sa masse comme unité de masse, et nous supposerons qu'il serve d'origine à un système d'axes de coordonnées Ox, Oy, Oz rectangulaires deux à deux et de directions fixes. Désignons de plus par m la masse du corps dont nous nous proposons d'étudier le mouvement, par m' celle du troisième corps; f désignant le coefficient d'attraction relatif aux unités de masse, de longueur et de temps adoptées, nous ferons en outre

$$\mu_1 = f(1+m), \qquad \mu' = fm';$$

x, y, z étant les coordonnées du corps troublé (m), x', y', z' celles du corps troublant (m'), substituons à ces coordonnées rectangulaires des coordonnées polaires, en posant

$$\begin{aligned} x &= r\cos v\cos\theta, \\ y &= r\sin v\cos\theta, \\ z &= r\sin\theta, \end{aligned}$$

des formules analogues ayant lieu pour (m').

Posons

$$\text{U} = \frac{\mu_1}{r} + \Omega,$$

Ω représentant la fonction perturbatrice, de sorte que

$$\Omega = \mu'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right),$$

en désignant par Δ la distance des deux corps (m) et (m'). L'application des équations de Lagrange nous fournit alors immédiatement ces équations

du mouvement de (m) sous la forme suivante :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(r^2\cos^2\theta\dfrac{dv}{dt}\right) = \dfrac{\partial\Omega}{\partial v}, \\ \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\cos^2\theta\dfrac{dv^2}{dt^2} - r\dfrac{d\theta^2}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{dr}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right) + r^2\sin\theta\cos\theta\dfrac{dv^2}{dt^2} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\theta}. \end{cases}$$

Introduisons avec Laplace, au lieu de r et de θ, deux nouvelles variables u et s définies par les relations

$$u = \frac{1}{r\cos\theta}, \qquad s = \text{tang}\,\theta.$$

Au lieu des équations (1), nous obtenons, par une transformation facile, le système

$$(2)\quad \begin{cases} dt = \dfrac{dv}{hu^2\sqrt{1+2\displaystyle\int\frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dv}{h^2u^2}}}, \\ \dfrac{d^2u}{dv^2} + u + \dfrac{1}{h^2u^2\left(1+2\displaystyle\int\frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dv}{h^2u^2}\right)}\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial v}\dfrac{du}{dv} + \cos\theta\dfrac{\partial U}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\theta}\right) = 0, \\ \dfrac{d^2s}{dv^2} + s + \dfrac{1}{h^2u^2\left(1+2\displaystyle\int\frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dv}{h^2u^2}\right)}\left(\dfrac{\partial\Omega}{\partial v}\dfrac{ds}{dv} - \dfrac{\partial\Omega}{\partial\theta}\right) = 0. \end{cases}$$

Dans ces équations, où la variable indépendante est non plus le temps t, mais la longitude v, h désigne une constante d'intégration choisie de façon que le coefficient de v, dans l'expression finale de t, devienne égal à l'inverse du moyen mouvement n de (m).

Remarquons que la première de ces équations peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle du second ordre aussi, savoir :

$$(3)\qquad \frac{d^2t}{dv^2} + \frac{2}{u}\frac{du}{dv}\frac{dt}{dv} + u^2\frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dt^3}{dv^3} = 0.$$

La seconde des équations (2) doit être légèrement modifiée avant de se présenter sous la forme qui nous sera commode. Posons

$$u = (1+\rho)\frac{\mu_1}{h^2},$$

de sorte que la nouvelle inconnue ρ que nous introduisons à la place de u sera une petite quantité de l'ordre de l'excentricité de la projection de l'orbite de (m) sur le plan des xy. Si nous remplaçons en outre $\frac{\partial U}{\partial r}$ par sa valeur $-\frac{\mu_1}{r^2}+\frac{\partial \Omega}{\partial r}$, l'équation en question devient

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2\rho}{dv^2}+\rho+\left(1-\frac{\cos^3\theta}{1+2\int\frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dv}{h^2u^2}}\right)+\frac{\frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{1}{h^2u^2}}{1+2\int\frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dv}{h^2u^2}}\frac{d\rho}{dv}\\ &\qquad+\frac{1}{\mu_1 u^2\left(1+2\int\frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dv}{h^2u^2}\right)}\left(\cos\theta\frac{\partial\Omega}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}\right)=0. \end{aligned} \right.$$

Avant d'aller plus loin, une remarque est encore nécessaire au sujet de la fonction représentée par l'intégrale $\int\frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dv}{u^2h^2}$: toutes les fois que nous rencontrerons des fonctions de cette sorte, c'est-à-dire représentées par une intégrale *indéfinie*, il faudra entendre que, la quantité soumise au signe $\int$ étant supposée développée en série trigonométrique procédant suivant les sinus et cosinus de certains multiples de la variable indépendante, l'intégration est effectuée sans ajouter aucune constante au résultat.

2. Les équations du mouvement, telles que nous venons de les obtenir, ne peuvent être intégrées que par approximations successives. Mais, comme nous l'avons déjà indiqué dans l'Introduction, tandis qu'habituellement, dans la première approximation, on fait complètement abstraction des termes qui contiennent en facteur la masse perturbatrice, nous nous proposons, au contraire, de tenir compte dès le début d'une importante fraction de ces termes. Abandonnant, par suite, les équations simplifiées qui conduisent au mouvement elliptique, nous devons tout d'abord examiner comment nous formerons les équations qui représenteront la première approximation du mouvement, c'est-à-dire le mouvement dans l'orbite intermédiaire.

Il est donc nécessaire avant tout de nous occuper du développement de la fonction perturbatrice Ω et de ses dérivées partielles.

Le nombre des développements possibles pour ces fonctions est très grand, et chaque méthode proposée pour l'étude du problème des trois corps en demande un qui lui soit plus particulièrement approprié. Nous allons exposer brièvement, en n'en conservant que les points essentiels, la méthode donnée

par M. Gyldén pour arriver au développement qui convient le mieux à la forme de l'équation de l'orbite intermédiaire.

3. En désignant par Δ la distance des deux corps m et m' et par H l'angle des rayons vecteurs de ces deux corps, nous avons

$$\Omega = \mu' R \quad \text{avec} \quad R = \frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}\cos H.$$

Comme

$$rr'\cos H = xx' + yy' + zz'$$

il vient immédiatement

$$\cos H = \cos(v - v')\cos\beta\cos\beta' + \sin\beta\sin\beta';$$

en outre

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos H}}.$$

Introduisons deux nouvelles constantes a et a', satisfaisant respectivement aux relations

$$n^2 a^3 = \mu_1, \qquad n'^2 a'^3 = \mu'_1,$$

n' étant le moyen mouvement du corps troublant (m') et μ'_1 représentant la quantité $f(1 + m')$.

Ceci posé, nous pouvons développer $\frac{1}{\Delta}$ suivant les cosinus des multiples de l'angle H, par la formule suivante :

$$\frac{a}{\Delta} = \frac{a'}{r'}A_0 + 2\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)A_1\cos H + 2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\left(\frac{r}{a}\right)^2 A_2\cos 2H + \dots$$

Les coefficients de ce développement sont déterminés, comme on sait, en supposant $\frac{r}{r'} < 1$, et posant $\frac{a}{a'} = \alpha$, par la formule

$$A_n = \alpha^{n+1}\frac{1.3.5\dots 2n-1}{2.4.6\dots 2n}F\left(\frac{1}{2},\ n + \frac{1}{2},\ n+1,\ \frac{r^2}{r'^2}\right),$$

...ction F représentant la série connue sous le nom de *série hypergéo-...que.*

...nous développons maintenant les coefficients A, nous trouvons, par la

forme du développement de Ω,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu'}a\Omega = {} & M_0^{(0)}\frac{a'}{r'} + M_2^{(0)}\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\left(\frac{r}{a}\right)^2 + M_4^{(0)}\left(\frac{a'}{r'}\right)^5\left(\frac{r}{a}\right)^4 + \ldots \\ & + 2\left[M_0^{(1)}\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right) + M_2^{(1)}\left(\frac{a'}{r'}\right)^4\left(\frac{r}{a}\right)^3 + M_4^{(1)}\left(\frac{a'}{r'}\right)^6\left(\frac{r}{a}\right)^5 + \ldots\right]\cos H \\ & + 2\left[M_0^{(2)}\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\left(\frac{r}{a}\right)^2 + M_2^{(2)}\left(\frac{a'}{r'}\right)^5\left(\frac{r}{a}\right)^4 + M_4^{(2)}\left(\frac{a'}{r'}\right)^7\left(\frac{r}{a}\right)^6 + \ldots\right]\cos 2H \\ & + \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Les coefficients, à l'exception toutefois de $M_0^{(1)}$, sont déterminés par la formule générale suivante :

$$M_{2p}^{(n)} = \alpha^{n+2p+1}\frac{1.3.5\ldots 2n+2p-1}{2.4.6\ldots 2n+2p}\,\frac{1.3\ldots 2p-1}{2.4\ldots 2p}.$$

Quant à la valeur de $M_0^{(1)}$, c'est celle qu'on déduit de cette formule, diminuée de $\frac{\alpha}{2}$; c'est donc zéro.

Dans le cas où $\frac{r}{r'}$ est supérieur à l'unité, les coefficients des cosinus des multiples de H devront être ordonnés par rapport aux puissances croissantes de $\frac{r'}{r}$; il en résultera des changements dans les calculs précédents et aussi dans ceux qui vont suivre. Il sera trop facile de les apercevoir pour que nous insistions davantage; aussi nous contenterons-nous de développer l'étude du cas considéré en premier lieu.

4. Dans le développement de Ω figurent les cosinus des multiples de l'angle H; ces cosinus se développeront sans aucune difficulté suivant les cosinus des multiples de l'angle $v - v'$; c'est une chose que nous supposerons faite. Si nous calculons alors les dérivées partielles de Ω, nous obtenons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^2u^2}\frac{\partial\Omega}{\partial v} = {} & \frac{2a\mu'}{h^2}\cos^2\theta\left[M_0^{(1)}\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^3 + M_2^{(1)}\left(\frac{a'}{r'}\right)^4\left(\frac{r}{a}\right)^5 + \ldots\right]\frac{\partial\cos H}{\partial v} \\ & + \frac{2a\mu'}{h^2}\cos^2\theta\left[M_0^{(2)}\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\left(\frac{r}{a}\right)^4 + M_2^{(2)}\left(\frac{a'}{r'}\right)^5\left(\frac{r}{a}\right)^6 + \ldots\right]\frac{\partial\cos 2H}{\partial v} \\ & + \frac{2a\mu'}{h^2}\cos^2\theta\left[M_0^{(3)}\left(\frac{a'}{r'}\right)^4\left(\frac{r}{a}\right)^5 + M_2^{(3)}\left(\frac{a'}{r'}\right)^6\left(\frac{r}{a}\right)^7 + \ldots\right]\frac{\partial\cos 3H}{\partial v} \\ & + \ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

Nous ferons aussi $r' = \frac{a'p'}{(1+\rho')\cos\theta'}$, l'analogie suffisant à préciser le sens des nouvelles quantités que nous introduisons et leur ordre de grandeur.

Si maintenant nous développons les puissances positives ou négatives de $\frac{r}{a}$ et de $\frac{r'}{a'}$ suivant les puissances entières et positives de ρ et de ρ', par la formule du binôme; si, en outre, nous remplaçons $\sin\theta$ et $\cos\theta$ respectivement par $\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$, en développant $\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ suivant les puissances de s (que nous supposons, comme ρ, une quantité du premier ordre); si nous faisons de même pour $\cos\theta'$ et $\sin\theta'$, et si enfin nous développons les cosinus des multiples de H et leurs dérivées partielles par rapport à θ et à v suivant les cosinus ou sinus des multiples de $v - v'$, nous obtiendrons finalement les fonctions précédentes, qui sont celles mêmes qui figurent dans les équations du mouvement sous la forme de séries procédant suivant les puissances entières et positives de ρ, ρ', s, s' (toutes quantités du premier ordre) et aussi suivant les sinus et cosinus de l'angle $v - v'$: le calcul n'offre manifestement aucune difficulté.

Nous nous bornerons à une seule remarque : la fonction $\frac{1}{h^2u^2}\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}$ contient en facteur la dérivée $\frac{\partial\cos H}{\partial\theta}$, c'est-à-dire la fonction

$$-\sin\theta\cos\theta'\cos(v-v') + \cos\theta\sin\theta';$$

elle est donc du premier ordre par rapport à s et s', c'est-à-dire qu'elle ne contient pas de termes indépendants à la fois de s et s'. On pourra d'ailleurs, dans la plupart des cas, prendre pour plan des xy le plan de l'orbite moyenne de (m'), de sorte que s' sera une quantité extrêmement petite; la fonction considérée pourra donc être regardée comme contenant s en facteur, à des termes près d'influence négligeable, au moins dans une première approximation.

5. Si nous nous rappelons maintenant que, dans les équations du mouvement établies ci-dessus, la variable indépendante est la longitude v de (m) comptée sur le plan fixe des xy, il en résulte que la question qui doit attirer notre attention consiste à rechercher comment on peut exprimer, à l'aide de cette variable, les diverses quantités qui figurent dans les dérivées partielles

de la fonction perturbatrice et qui dépendent de la loi du mouvement du corps troublant.

Notre but étant de déterminer une orbite intermédiaire et non le mouvement absolu de (m), nous supposerons qu'on puisse négliger l'action de (m) sur (m'), de sorte que nous regarderons comme parfaitement connu le mouvement de (m'); les quantités ρ' qui déterminent ce mouvement seront supposées exprimées en fonction de la longitude v', et nous supposerons connue la relation qui lie v' au temps t.

La question consiste donc simplement à chercher l'expression de v' en fonction de v. Puisque nous connaissons la relation qui lie v' et t, nous pouvons écrire

$$(5)\qquad n't + l' = v' + f(v'),$$

l' étant la longitude moyenne de m' à l'origine du temps, et $f(v')$ une fonction périodique connue de v' ne contenant aucun terme constant.

Considérant maintenant t comme fonction de v, nous avons, pour sa détermination, l'équation différentielle

$$\frac{d^2t}{dv^2} + \frac{2}{u}\frac{du}{dv}\frac{dt}{dv} + u^2\frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dt^3}{dv^3} = 0.$$

Regardons t comme la somme de deux autres fonctions, l'une t_1 qui sera déterminée par l'équation

$$\frac{d^2t_1}{dv^2} + \frac{2}{u}\frac{du}{dv}\frac{dt_1}{dv} = 0$$

ou mieux par la relation

$$\frac{dt_1}{dv} = \frac{1}{hu^2};$$

l'autre t_2, telle que $t = t_1 + t_2$ et par suite déterminée par l'équation différentielle

$$\frac{d^2t_2}{dv^2} + \frac{2}{u}\frac{du}{dv}\frac{dt_2}{dv} + u^2\frac{\partial\Omega}{\partial v}\left(\frac{1}{hu^2} + \frac{dt_2}{dv}\right)^3 = 0;$$

t_2 sera d'ailleurs une petite quantité, de l'ordre de la masse perturbatrice.

Si l'on connaît en fonction de v la valeur de u, on connaîtra aussi t_1; si donc nous appelons l la longitude de (m) à l'origine du temps, et que nous désignions par $F_1(v)$ une fonction connue de v qui, outre des termes pério-

diques, contiendra un terme proportionnel à v dont le coefficient sera très voisin de l'unité, nous pourrons écrire la relation

$$nt + l = nt_2 + F_1(v).$$

Appelons τ ce que devient t_2 quand on le diminue du terme constant et du terme proportionnel à v qui y figurent; nous pouvons alors écrire la relation précédente sous la forme

$$nt + l = n\tau + v + F(v), \tag{6}$$

$F(v)$ désignant une fonction de v composée uniquement de termes périodiques sans terme constant; quant à l'équation qui détermine τ, elle est facile à former : ce sera, en désignant par k le coefficient du terme proportionnel à v dans t_2,

$$\frac{d^2\tau}{dv^2} + \frac{2}{u}\frac{du}{dv}\left(k + \frac{d\tau}{dv}\right) + u^2\frac{\partial\Omega}{dv}\left(\frac{1}{hu^2} + k + \frac{d\tau}{dv}\right)^3 = 0.$$

k est d'ailleurs une fonction connue de h, puisque, si nous désignons par $\varphi(h)$ le terme non périodique dans $\frac{1}{hu^2}$, nous devons avoir

$$k + \varphi(h) = \frac{1}{n}.$$

Cette constante h et aussi la constante l seront, par suite, déterminées en écrivant que la fonction τ fournie par l'équation précédente ne contient ni terme constant ni terme proportionnel à v. En outre, les constantes arbitraires introduites par l'intégration de cette équation devront être choisies de façon que τ s'annule en faisant $\frac{\partial\Omega}{\partial v} = 0$.

Si, entre les deux relations (5) et (6), nous éliminons maintenant le temps t, nous tombons sur la relation qui lie v à v', relation qui contient d'ailleurs la fonction τ : en appelant μ le rapport $\frac{n'}{n}$ des moyens mouvements, cette relation s'écrit

$$v' + f(v') - l' = \mu v + \mu F(v) - \mu l + n'\tau.$$

En remarquant que $f(v')$ est de l'ordre de ρ' et $F(v)$ de l'ordre de ρ, on

arrivera facilement, par l'application de la formule de Lagrange, au développement de v' en fonction de v, développement dans lequel figurera τ.

En opérant les substitutions convenables, on ramènera finalement les équations du mouvement à ne contenir que les fonctions inconnues s, ρ et τ. Toutefois, et c'est là une des plus grandes difficultés du problème, ces fonctions ne figureront pas seulement sous forme finie ou par leurs dérivées. Elles figureront aussi sous le signe $\int$, et cela pour deux causes différentes qu'il est nécessaire d'indiquer : en premier lieu, par la présence, dans les équations qui déterminent s et ρ, de l'intégrale $\int \frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dv}{h^2u^2}$; en second lieu, par la présence de la fonction $F(v)$, qui est égale à $\int \frac{dv}{hu^2}$, au terme près proportionnel à v.

6. Ces considérations préliminaires succinctement indiquées, montrons maintenant comment nous formerons les équations destinées à fournir les éléments du mouvement en première approximation et comment aussi il faudra diriger les approximations successives.

En premier lieu, considérons l'équation qui détermine la tangente de la latitude s; c'est

$$\frac{d^2s}{dv^2} + s + \frac{1}{\left(1 + 2\int \frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dv}{h^2u^2}\right)}\left(\frac{1}{h^2u^2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{ds}{dv} - \frac{1}{h^2u^2}\frac{\partial\Omega}{\partial \vartheta}\right) = 0.$$

Supposons qu'on ait remplacé toutes les quantités qui contiennent en facteur la masse perturbatrice par leurs développements, tels que nous les avons indiqués dans les numéros précédents (les quadratures impossibles à effectuer resteront d'ailleurs simplement indiquées); en ayant égard à la remarque déjà faite que $\frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta}$ est du premier ordre par rapport à s ou s', l'équation pourra s'écrire sous la forme

$$(7) \qquad \frac{d^2s}{dv^2} + S_1\frac{ds}{dv} + S_2 s = S,$$

S, S_1, S_2 désignant des fonctions des quantités inconnues, et S, qui ne contient aucun terme où s puisse se mettre en facteur, est du premier ordre par rapport à s' et contient d'ailleurs, comme S_1, la masse perturbatrice en facteur.

L'équation qui déterminera la valeur de S en première approximation sera celle que l'on déduit de la précédente en y remplaçant les fonctions S,

S_1, S_2 par leurs parties connues sans faire aucune hypothèse préalable sur la nature du mouvement (à la vérité, on en fait une, mais indispensable : la connaissance du moyen mouvement). Pour obtenir ces nouvelles fonctions, on voit qu'il suffira, dans les développements de S, S_1, S_2, de supposer les quantités ρ, s et τ nulles : en particulier, la supposition de $\rho = 0$ nous montre immédiatement qu'il faudra aussi négliger la fonction désignée précédemment par $F(v)$, de sorte que la relation v et v' deviendra

$$v' + f(v') - l' = \mu r - \mu l;$$

enfin, comme nous supposons $\rho = 0$ et $s = 0$, ceci revient à supposer $r = a$, et par suite à prendre pour valeur de la constante p l'unité.

En conséquence, nous nous trouvons en présence d'une équation de la même forme que (7), mais où les coefficients sont supposés des fonctions connues de v; il faut d'ailleurs avoir soin de remarquer que le coefficient de S a l'unité pour partie indépendante de la fonction perturbatrice. Nous montrerons dans les Chapitres suivants quelles sont les méthodes proposées par M. Gyldén pour intégrer une telle équation.

Remarquons seulement, et ceci s'appliquera aux paragraphes suivants, que, une fois l'équation qui fournira cette première valeur de S formée, il ne sera pas nécessaire de tenir compte de tous ses termes : il est manifeste en effet qu'il n'y aura pas avantage à conserver des termes connus à la vérité, mais qui seraient d'un ordre de grandeur inférieur ou même comparable à ceux que l'on est obligé de négliger tout d'abord.

Disons tout de suite aussi que, dans les approximations suivantes, les équations qui détermineront successivement les valeurs de plus en plus approchées de S se présenteront toujours dans la même forme : pour former ces équations, il suffira en effet de remplacer dans les expressions générales des coefficients de l'équation (7) les quantités ρ, s et τ négligées tout d'abord par les valeurs approchées dont on sera actuellement en possession; la constante p sera aussi remplacée par sa valeur approchée.

7. La formation de l'équation en ρ est un peu moins simple que celle de l'équation en S. L'équation (4) (n° 1) peut s'écrire, quand on y remplace les dérivées partielles de la fonction perturbatrice par leurs développements, sous la forme

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + R_1 \frac{d\rho}{dv} + R'_2 \rho = R, \tag{8}$$

R, R_1, R_2 étant des fonctions connues de v, de ρ, s et τ; en outre, R ne contient aucun terme où ρ puisse se mettre en facteur. s sera remplacé par sa valeur approchée en fonction de v; et dans la première approximation on fera $\tau = 0$: on fera de même $\rho = 0$ dans les fonctions R_1 et R_2, et par suite, comme tout à l'heure, p sera pris égal à l'unité; comme tout à l'heure, enfin, remarquons que le coefficient R_2 de ρ devient égal à l'unité, quand on suppose la masse perturbatrice nulle.

R, nous l'avons dit, ne contient pas de terme où ρ puisse se mettre en facteur. Cependant, et c'est là ce qui rend la difficulté plus grande, R n'est pas indépendant de ρ; il suffit en effet de se reporter à ce que nous avons dit à la fin du n° 5 pour vérifier que R renferme des termes de la forme

$$\int \rho^n \sin(\lambda v - A)\, dv,$$

n désignant un entier positif, λ et A des constantes. Pour être plus exact, il faudrait dire que R (et il en serait de même de la fonction S du numéro précédent) renferme des termes de la forme

$$\int \rho^n s^{n'} t^{n''} \sin(\lambda v - A)\, dv;$$

mais il est trop facile de vérifier que, quel que soit d'ailleurs le degré d'approximation auquel on est déjà arrivé, on pourra toujours dans ces termes remplacer s et τ par leurs valeurs approchées; on pourra aussi remplacer de la même façon ρ par une valeur approchée (zéro, lorsqu'il s'agit de la première approximation), lorsque n est supérieur à l'unité; mais il n'en va plus ainsi lorsque n est égal à l'unité, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit de termes de la forme

$$\int \rho \sin(\lambda v - A)\, dv;$$

ces termes, dont le coefficient est d'ordre zéro (abstraction faite de la masse perturbatrice), ont une importance capitale et il est indispensable d'en tenir compte dès la première approximation : l'exemple que nous traitons plus loin mettra d'ailleurs ce fait en lumière d'une façon bien digne d'attirer l'attention.

Voici la méthode qu'emploie M. Gyldén, pour transformer ces termes et tenir compte de leur partie la plus importante : l'équation précédente peut être résolue par rapport à ρ et fournir ainsi une valeur de ρ telle que

$$\rho = R' \frac{d^2\rho}{dv^2} + R'_1 \frac{d\rho}{dv} + R'_2.$$

Si nous portons cette valeur de ρ dans $\int \rho \sin(\lambda v - A) dv$, nous obtenons, pour exprimer cette intégrale, une somme d'intégrales nouvelles rentrant dans les formes suivantes (si toutefois on ne porte son attention que sur celles qui seront par rapport à ρ d'un ordre inférieur au second, les autres, nous l'avons déjà dit, pouvant être évaluées par approximation sans aucun inconvénient) :

$$\int \frac{d^2\rho}{dv^2} \sin(\lambda v - A)\, dv, \quad \int \frac{d\rho}{dv} \sin(\lambda v - A)\, dv, \quad \int \rho \sin(\lambda v - A)\, dv,$$

$$\int \sin(\lambda v - A)\, dv, \quad \int \sin(\lambda v - A)\, dv \int \rho \sin(\lambda' v - A')\, dv.$$

On remarquera d'ailleurs que, dans ces intégrales, les constantes λ et A peuvent avoir des significations absolument différentes de celles qu'elles ont dans le terme à transformer; elles servent seulement à caractériser un type de fonctions.

En outre, il ne faudra pas oublier que les coefficients de tous ces termes se trouveront contenir la masse perturbatrice en facteur, sauf une partie de ceux de la forme $\int \sin(\lambda v - A)\, dv$, qui seront d'ailleurs du second ordre par rapport à S^2, et un autre, le plus important de tous, savoir

$$\int \frac{d^2\rho}{dv^2} \sin(\lambda v - A)\, dv;$$

la fonction R'_0 ne diffère, en effet, de l'unité que d'une quantité de l'ordre de la masse perturbatrice. Comme le terme à transformer ne figure lui-même dans l'équation (8) que multiplié par la masse perturbatrice, il en résulte que, à part les termes que nous venons de signaler, les autres seront du second ordre par rapport à cette masse et pourront être négligés, en partie du moins.

Or l'intégration par parties conduit à la relation

$$\int \frac{d^2\rho}{dv^2} \sin(\lambda v - A)\, dv = \frac{d\rho}{dv} \sin(\lambda v - A) - \lambda\rho \cos(\lambda v - A) + C_2 - \lambda^2 \int \rho \sin(\lambda v - A)\, dv,$$

C_2 désignant une quantité constante qui, puisque les intégrales sont effectuées sans l'addition d'aucune constante arbitraire, est égale au terme non périodique dans la fonction $\lambda\rho \cos(\lambda v - A) - \frac{d\rho}{dv} \sin(\lambda v - A)$.

De même on a

$$\int \frac{d\rho}{dv} \sin(\lambda v - A)\, dv = \rho \sin(\lambda v - A) + C_1 - \lambda \int \rho \cos(\lambda v - A)\, dv,$$

C_1 étant une constante; et aussi

$$\begin{aligned}&\int \sin(\lambda v - A)\, dv \int \rho \sin(\lambda' v - A')\, dv \\ &\quad = C_0 - \frac{1}{\lambda} \cos(\lambda v - A) \int \rho \sin(\lambda' v - A')\, dv + \frac{1}{\lambda} \int \rho \cos(\lambda v - A) \sin(\lambda' v - A')\, dv.\end{aligned}$$

C_0 étant encore une constante.

Par suite, le terme à transformer $\int \rho \sin(\lambda v - A)\, dv$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\int \rho \sin(\lambda v - A)\, dv = A_0 + A_1 \frac{d\rho}{dv} + A_2 \frac{d^2\rho}{dv^2} \\ + \alpha \int \rho \sin(\lambda v - A)\, dv + \Sigma B \int \rho \sin(\lambda' v - A')\, dv;\end{aligned}$$

dans cette formule A_1, A_2, α sont des fonctions connues; le dernier symbole représente une somme de termes qu'on se contentera de remplacer par des valeurs approchées; et enfin A_0 est une fonction en partie connue, en partie inconnue, puisqu'elle dépend des constantes C_0, C_1, C_2 qui sont inconnues; ces constantes seront aussi remplacées à chaque approximation nouvelle par leurs valeurs déterminées par l'approximation précédente.

Ces substitutions faites, l'équation précédente sera résolue par rapport à $\int \rho \sin(\lambda v - A)\, dv$, et la valeur obtenue sera portée dans l'équation (8), qui détermine ρ. Nous n'avons parlé que de la transformation des termes tels que $\int \rho \sin(\lambda v - A)\, dv$; il se présente aussi, provenant de la fonction $F(v)$, un terme de la forme $\int \rho\, dv$; il est clair que la même méthode s'appliquera à sa transformation.

Le même calcul répété à chaque approximation nouvelle, en tenant compte des valeurs obtenues dans l'approximation précédente par les quantités inconnues et les constantes indéterminées, conduira toujours manifestement à des équations de la même forme, forme qui est aussi celle des équations qui déterminent la tangente de la latitude s,

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + R_1 \frac{d\rho}{dv} + R_2 \rho = R, \tag{9}$$

R, R_1, R_2 désignant des fonctions connues de v, et R_2 devenant égal à l'unité, quand on suppose la masse perturbatrice nulle.

8. Arrivons enfin à la détermination de l'équation en τ, soit

$$\frac{d^2\tau}{dv^2} + \frac{2}{u}\frac{du}{dv}\left(k + \frac{d\tau}{dv}\right) + u^2\frac{\partial\Omega}{\partial v}\left(\frac{1}{hu^2} + k + \frac{d\tau}{dv}\right)^3 = 0; \tag{10}$$

comme nous l'avons dit, k est une fonction connue de h, et l'intégration doit être effectuée de façon que τ ne contienne ni terme constant ni terme proportionnel à v.

Dans cette équation, τ figure sous forme finie dans les termes de la forme $\cos(\lambda v + q\tau - \mathrm{A})$, q étant un entier; ces termes s'écriront

$$\cos q\tau \cos(\lambda v - \mathrm{A}) - \sin q\tau \sin(\lambda v - \mathrm{A}),$$

et $\sin q\tau$ et $\cos q\tau$ seront développés en séries suivant les puissances de τ; alors, en remplaçant ρ et s par des valeurs approchées déjà déterminées, l'équation (10) peut se mettre sous la forme

$$\frac{d^2\tau}{dv^2} + \frac{d\tau}{dv}\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2\tau = \mathrm{T}, \tag{11}$$

les fonctions T, T_1, T_2 étant toutes trois des fonctions connues de v et des constantes l et h, T_1 et T_2 contenant, en outre, les quantités inconnues $\frac{d\tau}{dv}$ et τ; dans la première approximation, on fera ces quantités égales à zéro dans ces fonctions; dans les approximations suivantes, on les remplacera par leurs valeurs approchées déjà connues.

On aura donc toujours affaire à des équations du type (11), les symboles $\mathrm{T}, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ représentant des fonctions connues de v.

Cette équation (11) rentre, à plusieurs points de vue, dans une classe différente du type commun à (7) et à (9); la raison en est de ce que T_2, le coefficient de τ, est de l'ordre de la masse perturbatrice, tandis que, dans les équations précédentes, les fonctions correspondantes S_2 et T_2 se réduisaient à l'unité pour $m' = 0$; de plus, T_1 est de l'ordre de ρ, et non pas, comme S_1 et R_1, de l'ordre de la fonction perturbatrice. Enfin il faut remarquer que, si l'on y fait partout $\tau = 0$, sans y remplacer d'ailleurs $\frac{d\tau}{dv}$ par une valeur approchée, l'équation (11) devient intégrable; en se reportant aux numéros précédents, on voit en effet, immédiatement, que, dans

cette hypothèse, on a

$$\frac{d\tau}{dv} = \frac{1}{hu^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2\int\frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dv}{h^2u^2}}} - 1\right) - k.$$

Il résulte de là que, dans la plupart des cas, on pourra se contenter d'intégrer l'équation (11) de cette façon, par approximations successives ou, plus simplement, ce qui revient au même, de calculer, conformément à la théorie ordinaire, le temps par la formule

$$(12) \qquad dt = \frac{dv}{hu^2\sqrt{1+2\int\frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dv}{h^2u^2}}},$$

les diverses quantités inconnues qui figurent dans cette formule étant remplacées par leurs valeurs de plus en plus approchées.

Toutefois il sera préférable de recourir à l'équation (11), telle que nous l'avons écrite, lorsque, dans $\frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{1}{h^2u^2}$, figureront des termes de la forme $\cos(\lambda v - A)$, λ étant très petit, c'est-à-dire lorsqu'on craindra l'introduction par la formule (12) de petits diviseurs d'intégration.

Cependant on pourra profiter de l'avantage offert par l'équation (11) de s'intégrer sans difficulté lorsqu'on y néglige le terme $T_2\tau$; à cet effet, posant

$$\tau = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2,$$

nous déterminerons respectivement ces trois nouvelles quantités par les équations

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\tau_0}{dv^2} + T_1\dfrac{d\tau_0}{dv} = T, \\[2mm] \dfrac{d^2\tau_1}{dv^2} + T_2\tau_1 \quad = -\tau_0 T_2, \\[2mm] \dfrac{d^2\tau_2}{dv^2} + T_1\dfrac{d\tau_2}{dv} + T_2\tau_2 = -\dfrac{d\tau_1}{dv}T_1. \end{cases}$$

La première de ces équations, linéaire et du premier ordre par rapport à $\frac{d\tau}{dv}$, s'intègre immédiatement; la seconde, l'équation (13), fera l'objet d'une étude spéciale avec les équations (7) et (9); enfin, pour intégrer la dernière, on remarquera que τ_2 est une quantité très petite, puisque l'on

peut regarder τ_0 et τ_1 comme représentant à très peu près les fractions de τ dues respectivement à l'influence des fonctions T_1 et T_2, et qu'on a aussi tenu compte du second membre T. On pourra donc employer les méthodes ordinaires, dont l'usage est rendu légitime par la petitesse de τ_2; on obtiendra, par exemple, une valeur approchée de τ_2 en faisant abstraction du terme $T_2\tau_2$; en portant cette valeur dans ce même terme et intégrant de nouveau, on obtiendra une nouvelle valeur plus approchée, et ainsi de suite.

En résumé, nos efforts doivent se porter maintenant sur les méthodes d'intégration propres aux équations (7) et (9) d'une part, à l'équation (13) de l'autre; celle-ci ne différant des deux premières qu'en ce que le coefficient de la dérivée première de la fonction inconnue est nul et que le coefficient de la fonction inconnue elle-même se réduit à zéro et non à l'unité, lorsque l'on suppose $m' = 0$.

9. Afin d'élucider le plus possible les développements précédents, nous allons montrer, dès maintenant, comment on formera les équations du mouvement de la Lune; comment, en particulier, il faudra former les équations de l'orbite intermédiaire, c'est-à-dire de l'orbite que nous substituons à l'ellipse de Kepler comme base des approximations successives.

A la vérité, Laplace déjà avait rejeté, dans sa Théorie de la Lune, l'ellipse de Kepler proprement dite comme première approximation : il introduit en effet, dès le début du calcul, les mouvements séculaires du nœud et du périgée de l'orbite lunaire, sous forme de quantités indéterminées il est vrai, mais que des considérations accessoires permettent cependant de déterminer.

Ce procédé empirique était rendu nécessaire par les circonstances particulières qui se rencontrent dans l'étude du mouvement de la Lune; la théorie ordinaire des perturbations fournit en première approximation pour le mouvement du périgée un nombre qui est moitié du véritable, et les approximations successives basées sur ce point de départ sont loin de converger rapidement. Nous verrons au contraire que, sans faire aucune autre hypothèse que la connaissance des moyens mouvements du Soleil et de la Lune et, ce qui est le plus digne de remarque, sans faire aucune hypothèse préalable sur la forme des quantités inconnues, nous arriverons, dès la première approximation, à représenter le mouvement de la Lune d'une façon très approchée; sans insister davantage sur ce point, qui nous occu-

pera spécialement à la fin de ce travail, disons seulement que les principales inégalités : l'équation du centre, l'évection, la variation, l'équation annuelle, figureront dans l'orbite intermédiaire que nous déterminerons d'une façon suffisamment approchée pour nous rendre compte de leur importance et de leur ordre de grandeur, et que, en particulier, les mouvements séculaires du nœud et du périgée se trouveront déterminés avec une approximation considérable.

La question de l'orbite intermédiaire de la Lune a été déjà traitée par M. Gyldén (1) et par M. A. Shdanow (2). M. Gyldén, dans une première approximation, détermine le mouvement du périgée à moins de $\frac{1}{15}$ de sa valeur. M. Shdanow, dans un Mémoire remarquable, fait, en partant des résultats de M. Gyldén, une deuxième approximation qui le conduit à une valeur du mouvement du périgée lunaire ne différant pas de la véritable de sa $\frac{1}{650}$ partie, et à une valeur du mouvement du nœud de l'orbite qui n'est pas en erreur de sa $\frac{1}{1000}$ partie.

Il nous a paru intéressant de reprendre la même question en partant, non plus des équations de Hansen, comme le font ces éminents astronomes, mais des équations de Laplace. La méthode d'intégration reste la même, mais la direction du calcul est un peu modifiée et les nombres qui servent de base sont changés; tandis, en effet, que par moyen mouvement de la Lune nous entendons ici le moyen mouvement sidéral, M. Gyldén et M. Shdanow entendent le moyen mouvement anomalistique : aussi nos résultats ne seront-ils pas directement comparables à ceux de Hansen, mais, au contraire à ceux de Laplace.

10. Si nous prenons le plan de l'écliptique moyen pour plan des xy, nous pouvons supposer nulle la latitude du Soleil et faire, par suite, $s' = 0$; en outre, nous regarderons, comme on le fait d'habitude, le rapport μ des moyens mouvements du Soleil et de la Lune comme une quantité du premier ordre, ainsi que ρ, ρ' et s; enfin, si nous négligeons la masse de la Terre à côté de celle du Soleil, nous aurons

$$\mu' = \mu'_1 = n'^2 a'^3 \qquad \text{avec} \qquad h^2 = \mu_1 ap = n^2 a^4 p.$$

(1) *Die intermediäre Bahn des Mondes* (*Acta mathematica*, 7 : 2).

(2) *Recherches sur le mouvement de la Lune autour de la Terre d'après la théorie de M. Gyldén*; Stockholm, 1885.

Si nous nous bornons, dans le développement des dérivées partielles de Ω, aux termes d'ordre inférieur au quatrième, et si nous remarquons que

$$\cos H = \cos\vartheta \cos(v - v'),$$

et par suite

$$\cos 2H = \cos^2\vartheta \cos 2(v - v') - \sin^2\vartheta,$$

nous obtenons immédiatement, pour les expressions de ces fonctions,

$$\frac{1}{h^2 u^2}\frac{\partial\Omega}{\partial v} = -\frac{3}{2}\mu^2 \cos^4\vartheta \frac{1}{p}\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\left(\frac{r}{a}\right)^4 \sin 2(v - v'),$$

ou

$$\frac{1}{h^2 u^2}\frac{\partial\Omega}{\partial v} = -\frac{3}{2}\mu^2 \frac{p^3}{p'^3}\frac{(1+\rho')^3}{(1+\rho)^4}\sin 2(v - v'),$$

puis

$$\frac{1}{h^2 u^2}\frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta} = -\frac{3}{2}\mu^2 \frac{p^3}{p'^3}\frac{(1+\rho')^3}{(1+\rho^4)} s[1 + \cos 2(v - v')];$$

enfin

$$\frac{1}{\mu_1 u^2}\left(\cos\vartheta\frac{\partial\Omega}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta}\right) = \frac{1}{2}\mu^2 \frac{p^3}{p'^3}\frac{(1+\rho')^3}{(1+\rho)^3}[1 + 3\cos 2(v - v')].$$

D'ailleurs on a, avec une approximation suffisante,

$$\rho' = \varepsilon' \cos(c'v' - \varpi'),$$

ε' désignant l'excentricité de l'orbite terrestre; c' un coefficient très voisin de l'unité; ϖ' la longitude du périgée solaire à l'origine du temps.

Il faut encore exprimer v' en fonction de v; en confondant, pour effectuer ce calcul qui ne peut se faire que par approximation, t avec t_1, on a

$$dt = \frac{dv}{u^2 h},$$

ou bien

$$n\,dt = \frac{p^{\frac{3}{2}}\,dv}{(1+\rho)^2}.$$

La constante p, nous l'avons déjà dit, ne diffère de l'unité que d'une quantité de l'ordre de ρ^2. Si donc, dans le calcul qui nous occupe, nous négligeons les quantités de cet ordre (ce qui concorde avec ce que nous avons convenu plus haut, savoir de négliger dans les dérivées de Ω les quantités d'ordre supérieur au troisième), nous pouvons écrire

$$nt + l = v - 2\int\rho\,dv.$$

De la même façon nous aurons au même degré d'approximation

$$n't + l' = v' - 2\int \rho' \, dv';$$

de ces formules on tire immédiatement la suivante

$$2(v - v') = 2(1-\mu)v - (2l' - 2\mu l) - 4\int \rho' \, dv' + 4\mu \int \rho \, dv,$$

ce que nous écrirons

$$2(v - v') = \lambda v - \text{A} - 4\int \rho' \, dv' + 4\mu \int \rho \, dv,$$

en posant, pour abréger l'écriture,

$$\lambda = 2(1-\mu), \qquad \text{A} = 2l' - 2\mu l.$$

On peut encore remarquer que le dernier terme, dans la formule précédente, étant du second ordre, nous pouvons le négliger, d'après nos conventions : quant à l'avant-dernier terme, $-4\int \rho' \, dv'$, il est du premier ordre, et nous le désignerons par E, de sorte que nous aurons la formule simple

$$2(v - v') = \lambda v - \text{A} + \text{E}.$$

11. Nous pouvons maintenant former avec la plus grande facilité les équations de l'orbite intermédiaire de la Lune. Considérons d'abord l'équation qui détermine s : en ne conservant que les termes d'un ordre inférieur au quatrième, on voit immédiatement que le dénominateur $1 + 2\int \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2}$ peut être réduit à l'unité, de sorte que l'équation devient

$$\frac{d^2 s}{dv^2} + s - \frac{3}{2}\mu^2 \frac{p^3}{p'^3} \frac{(1+\rho')^3}{(1+\rho)^4} \left\{ \frac{ds}{dv} \sin 2(v - v') - s[1 + \cos 2(v - v')] \right\} = 0.$$

L'angle $2(v - v')$ peut être réduit à $\lambda v - \text{A}$; on peut négliger ρ et ρ' et réduire p et p' à l'unité : finalement, au degré d'approximation imposé, il vient

$$(14) \qquad \frac{d^2 s}{dv^2} - \frac{3}{2}\mu^2 \sin(\lambda v - \text{A}) \frac{ds}{dv} + s\left[1 + \frac{3}{2}\mu^2 + \frac{3}{2}\mu^2 \cos(\lambda v - \text{A})\right] = 0.$$

Arrivons maintenant à la détermination de ρ : en négligeant dès maintenant les termes qui sont manifestement du quatrième ordre, l'équation peut s'écrire, en la calquant sur l'équation (4),

$$\frac{d^2 \rho}{dv^2} + \rho + 1 - \cos^3 \theta + 2\int \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{dv}{h^2 u^2} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{1}{h^2 u^2} \frac{d\rho}{dv} + \frac{1}{\mu_1 u^2}\left(\cos\theta \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}\right) = 0.$$

D'ailleurs $1 - \cos^2\theta$ se remplacera par $\frac{3}{2}s^2$, et l'on substituera, dans ce terme, à s sa valeur déterminée par l'équation précédente; on voit aussi que l'on peut négliger la fonction E dans le coefficient de $\frac{d\rho}{dv}$: l'équation devient donc

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} - \frac{3}{2}\mu^2 \sin(\lambda v - A)\frac{d\rho}{dv} + \rho + \frac{1}{2}\mu^2 \frac{p^3}{p'^3}\frac{(1+\rho')^3}{(1+\rho)^3}[1 + 3\cos(\lambda v - A + E)]$$
$$+ \frac{3}{2}s^2 - 3\mu^2\frac{p^3}{p'^3}\int\frac{(1+\rho')^3}{(1+\rho)^4}\sin(\lambda v - A + E)\,dv = 0;$$

p et p' seront réduits à l'unité. Considérons le terme

$$\frac{(1+\rho')^3}{(1+\rho)^3}[1 + 3\cos(\lambda v - A + E)].$$

L'approximation doit y être poussée jusqu'au premier ordre inclusivement; il devient, par suite,

$$(1 - 3\rho + 3\rho')[1 + 3\cos(\lambda v - A)] - 3E\sin(\lambda v - A);$$

il en sera de même pour le terme $\int\frac{(1+\rho')^3}{(1+\rho)^4}\sin(\lambda v - A + E)\,dv$, qui devient, par suite,

$$\int[(1 - 4\rho + 3\rho')\sin(\lambda v - A)\,dv + E\cos(\lambda v - A)\,dv].$$

Le seul terme que nous ayons à transformer sera, par conséquent, $\int\rho\sin(\lambda v - A)\,dv$, les autres s'intégrant immédiatement : le coefficient de ce terme dans l'équation est d'ailleurs du second ordre; or l'équation nous montre précisément que, à des termes du second ordre près, on a $\rho = -\frac{d^2\rho}{dv^2}$; nous pouvons donc nous contenter de remplacer le terme en question par $-\int\frac{d^2\rho}{dv^2}\sin(\lambda v - A)\,dv$, c'est-à-dire, en se reportant à ce qui a été dit plus haut, par

$$-\frac{d\rho}{dv}\sin(\lambda v - A) + \lambda\rho\cos(\lambda v - A) + \lambda^2\int\rho\sin(\lambda v - A)\,dv + C_2,$$

C_2 étant une constante dont nous avons expliqué la signification et que nous négligeons en première approximation. En égalant l'expression précédente à $\int\rho\sin(\lambda v - A)\,dv$ et résolvant par rapport à ces termes, il vient finale-

par M. Gyldén, que nous allons traiter maintenant, avant d'entreprendre l'étude des méthodes d'intégration propre aux équations (7), (9) et (13).

Dans l'hypothèse actuelle, le mouvement de (m) s'effectue dans un plan, et si ce plan est pris pour plan des x, y, de sorte que θ et s soient constamment nuls, les équations du mouvement deviennent

$$dt = \frac{dv}{hu^2}, \qquad \frac{d^2u}{dv^2} + u - \frac{\mu_1}{h^2} + \frac{1}{h^2u^2}\frac{\partial\Omega}{\partial r} = 0$$

avec la relation

$$u = \frac{1}{r}.$$

Si nous posons $\frac{1}{hu^2}\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \mathrm{P}$, P sera, comme Ω, une simple fonction de l'unique variable r ou u.

Nous devons tout d'abord, avant de supposer que P soit une fonction quelconque de r, signaler quelques cas particuliers intéressants. Le premier, considéré déjà par Newton et rappelé par M. Thiele (*Astronomische Nachrichten*, n° 2429), se présente lorsqu'on fait $\mathrm{P} = \frac{k}{r} + k'$, k et k' désignant des constantes; le résultat auquel conduit cette hypothèse est bien connu : l'orbite correspondante est une section conique dont le foyer est à l'origine, mais dont le grand axe tourne autour de ce foyer avec une vitesse angulaire constante.

Si nous supposons maintenant, comme le fait M. Gyldén, que la fonction P soit de la forme hr^3 ou $\frac{h}{r^2}$, h désignant une constante, on voit tout de suite que l'intégration de l'équation précédente est possible à l'aide des fonctions elliptiques, et, plus généralement, on arrivera au même résultat, comme le fait remarquer M. Thiele dans l'article déjà cité, en supposant à P l'une des formes

$$h + \frac{k}{r} + ar^3 + br^2,$$

$$h + \frac{k}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{b}{r^3}.$$

Sans développer la solution donnée par M. Gyldén des deux cas que nous venons de signaler (¹), indiquons seulement comment on les rencontre en

(¹) *Ueber die Bahn eines materiellen Punktes der sich unter dem Einflusse einer*

Astronomie. Si nous imaginons en premier lieu qu'il s'agisse du problème des trois corps proprement dit, on conçoit qu'il puisse y avoir avantage, en supposant toujours $s = 0$, à négliger complètement, dans une première approximation, $\frac{\partial \Omega}{\partial v}$ et $\frac{\partial \Omega}{\partial s}$, et à ne conserver, dans $\frac{1}{h^2 u^2} \frac{\partial \Omega}{\partial v}$, que le seul terme $\frac{2\mu'}{h^2} M_2^{(0)} \left(\frac{r}{a}\right)^3$; dans cette hypothèse, nous nous trouvons précisément dans le premier cas : ceci suppose d'ailleurs le rapport $\frac{r}{r'}$ constamment inférieur à l'unité. Dans le cas où ce rapport serait, au contraire, constamment supérieur à l'unité, on verrait immédiatement qu'une hypothèse analogue conduit au second cas.

Le premier cas se rencontre encore dans la détermination de l'orbite intermédiaire d'une comète qui passe à proximité d'une planète; c'est lui aussi qui fournit la solution du problème qui consiste à rechercher le mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force centrale dont l'expression est de la forme $\frac{\mu_1}{r^2} + \mu_2 r$, problème important dans l'étude de la formation de l'univers, comme le montrent les récents travaux de M. Faye.

Enfin, de la solution du second cas, on déduit la nature du mouvement d'un point matériel attiré par un sphéroïde suivant la loi de Newton et mobile dans le plan de l'équateur de ce sphéroïde : cette question est d'une grande importance dans l'étude des perturbations des satellites, en particulier de ceux de Jupiter et de Saturne.

13. Revenons maintenant au cas général, dans lequel P est une fonction quelconque de r. En posant

$$u = (1 + \rho) \frac{\mu_1}{h^2},$$

l'équation du numéro précédent devient

$$\frac{d^2 \rho}{dv^2} + \rho = -\frac{1}{\mu_1 u^2} \frac{\partial \Omega}{\partial r};$$

Centralkraft von der Form $\frac{\mu_1}{r^2} + \mu_2 r$ *bewegt* (*Kong. svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar,* Bandet 17. — *Om banan af en Punkt, som rör sig, en Sferoids equatorsplan under inverkan af den Newtonska attraktionskraften* (*Ofversigt af Kong. Vet. Akad. Förhandlingar,* 1880). — *Ueber die intermediäre Bahnen der Cometen in der Nähe...* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg,* 1884).

développons le second membre suivant les puissances de ρ, qui est une petite quantité de l'ordre de l'excentricité; nous nous trouvons alors en présence d'une équation de la forme suivante

$$(1) \qquad \frac{d^2\rho}{dv^2} + \rho = \beta_0 + \beta_1\rho + \beta_2\rho^2 + \ldots,$$

les coefficients β étant tous de l'ordre de la force perturbatrice.

Cette équation ne peut être intégrée directement, il faut procéder par approximations successives; le but à atteindre est donc de trouver une première valeur ρ_0 de l'inconnue, fournissant une suite vraiment convergente d'approximations et, par conséquent, telle que la différence entre ρ et ρ_0 soit et reste toujours très petite par rapport à ρ_0. Comme l'a fait remarquer M. Weierstrass, dans ses Leçons, il y a quelques années, il est tout d'abord indispensable, pour obtenir ce résultat, d'éviter l'introduction des termes séculaires, c'est-à-dire des termes qui contiennent l'argument v à une certaine puissance en dehors des signes des fonctions périodiques. Il est clair, en effet, que si ces termes se présentent, ils formeront dans l'expression de ρ une série ordonnée suivant les puissances de v, les coefficients pouvant d'ailleurs être des fonctions périodiques de ce même argument v, et tant qu'on n'aura pas prouvé la convergence de cette série pour toutes les valeurs de cet argument, ce qui est impossible en général, la solution ainsi obtenue devra être rejetée.

Dans la solution habituelle du problème, on néglige d'abord le second membre tout entier de l'équation (1), et l'équation qui détermine ρ_0 étant

$$(2) \qquad \frac{d^2\rho_0}{dv^2} + \rho_0 = 0,$$

il vient

$$\rho_0 = e\cos(v - \varpi),$$

e et ϖ étant deux constantes arbitraires.

Si nous posons

$$\rho = \rho_0 + \rho_1,$$

il vient, pour déterminer ρ_1,

$$(3) \quad \frac{d^2\rho_1}{dv^2} + \rho_1 = \beta_0 + \beta_1\rho_0 + \beta_2\rho_0^2 + \ldots + \rho_1(\beta_1 + 2\beta_2\rho_0 + 3\beta_3\rho_0^2 + \ldots) + \ldots.$$

Quoique le second membre tout entier soit du premier ordre par rapport à la masse perturbatrice, il n'en sera pas de même de ρ_1 pour toutes les valeurs de r (¹). En effet, si en premier lieu nous négligeons le second membre, à l'exception du seul terme $\beta_1\rho_0$, on aperçoit immédiatement que l'expression de ρ_1 contiendra un terme multiplié par l'argument v et susceptible, par conséquent, de devenir aussi grand qu'on voudra. Mais on pourrait penser que cet inconvénient provient de ce que nous n'avons tenu compte que d'un seul des termes du second membre qui sont multipliés par β_1. Si nous ne négligeons aucun de ces termes, l'équation (3) devient

$$\frac{d^2\rho_1}{dv^2}+(1-\beta_1)\rho_1=\beta_1\rho_0, \tag{4}$$

et il est aisé alors de se convaincre que la valeur de ρ_1 tirée de cette équation contient des termes exactement comparables à ρ_0.

D'ailleurs, intégrer successivement les équations (2) et (4) revient à choisir comme première valeur approchée de ρ la quantité ρ_0 fournie par l'intégration de la nouvelle équation

$$\frac{d^2\rho_0}{dv^2}+(1-\beta_1)\rho_0=0. \tag{5}$$

Alors, en posant toujours

$$\rho=\rho_0+\rho_1,$$

il vient, pour déterminer ρ_1,

$$\frac{d^2\rho_1}{dv^2}+(1-\beta_1)\rho_1=\beta_0+\beta_2\rho_0^2+\beta_3\rho_0^3+\ldots+(2\beta_2\rho_0+3\beta_3\rho_0^2+\ldots)\rho_1+\ldots. \tag{6}$$

De l'équation (5), en posant

$$\lambda=\sqrt{1-\beta_1},$$

on tire

$$\rho_0=e\cos(\lambda v-\varpi)$$

et l'équation (6) donne, en désignant par Z le second membre,

$$\rho_1=-\frac{1}{\lambda}\cos\lambda v\int Z\sin\lambda v\,dv+\frac{1}{\lambda}\sin\lambda v\int Z\cos\lambda v\,dv.$$

(¹) GYLDEN, *Vierteljahrschrift der astronomischen Gesellschaft*, 16.

Or, si pour Z nous choisissons le terme $\beta_3\rho_0^3$, il vient

$$Z = \beta_3 e^3 \cos^3(\lambda v - \varpi) = \tfrac{3}{4}\beta_3 e^3 \cos(\lambda v - \varpi) + \tfrac{1}{4}\beta_3 e^3 \cos 3(\lambda v - \varpi),$$

et il est manifeste que la substitution de cette expression dans la valeur de ρ_1 introduira, grâce à la présence du terme en $\cos(\lambda v - \varpi)$, des termes qui contiendront l'argument v en dehors des signes sinus et cosinus, c'est-à-dire des termes séculaires.

Comme tout à l'heure toutefois, on aurait pu éviter l'introduction de ces termes de la façon suivante : dans l'équation (6), ayons égard au terme $3\beta_3\rho_0^2\rho_1$, ou plutôt à la partie de ce terme qui ne contient pas explicitement v, c'est-à-dire $\frac{3}{2}\beta_3 e^2\rho_1$ et déterminons ρ_1 par l'équation

$$\frac{d^2\rho_1}{dv^2} + \left(1 - \beta_1 - \frac{3}{2}\beta_3 e^2\right)\rho_1 = \frac{3}{4}\beta_3 e^3 \cos(\lambda v - \varpi); \tag{7}$$

il n'est pas difficile alors de s'assurer que ρ_1 contiendra des termes de même ordre que la quantité ρ_0 : c'est un calcul trop aisé pour qu'il soit nécessaire d'insister davantage.

14. L'équation (5) est donc insuffisante pour conduire à la vraie solution du problème : il faut au second membre de l'équation (1) choisir un terme de plus, et par suite ne plus se contenter d'avoir affaire à une équation linéaire : tel est, dans ce cas particulier, le grand progrès réalisé par M. Gyldén.

Comme la suite des calculs le montrera, il n'y a pas d'avantage réel à tenir compte dès le début des termes qui contiennent les puissances paires de ρ. Si donc nous voulons rester en état d'effectuer l'intégration à l'aide de fonctions transcendantes suffisamment connues, on voit que la seule équation qui pourra nous servir de point de départ sera

$$\frac{d^2\rho_0}{dv^2} + (1 - \beta_1)\rho_0 - \beta_3\rho_0^3 = 0.$$

On en tire

$$\left(\frac{d\rho_0}{dv}\right)^2 = g^2 - (1 - \beta_1)\rho_0^2 + \frac{1}{2}\beta_3\rho_0^4,$$

g^2 étant une constante d'intégration.

On peut écrire

$$\left(\frac{d\rho_0}{dv}\right)^2 = g^2\left(1 - \frac{\rho_0^2}{e^2}\right)\left(1 - k^2\frac{\rho_0^2}{e^2}\right)$$

et l'on déterminera ρ_2 par l'équation

$$\frac{d^2\rho_2}{dv^2} + (1 - \beta_1 - 3\beta_3\rho_0^2)\rho_2 = \beta_0'',$$

et ainsi de suite.

On aura ainsi exprimé ρ sous la forme d'une série

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots,$$

et nous allons faire voir que cette série remplit les conditions nécessaires pour faire de la solution ici proposée une bonne solution, c'est-à-dire qu'elle est toujours convergente et rapidement convergente.

15. Considérons l'équation qui détermine ρ_1. Si l'on y remplace ρ_0 par sa valeur et si l'on prend pour variable indépendante l'argument x défini précédemment, elle devient

$$\frac{d^2\rho_1}{dx^2} + \frac{e^2}{g^2}(1 - \beta_1 - 3\beta_3 e^2 \operatorname{sn}^2 x)\rho_1 = \frac{e^2}{g^2}\beta_0';$$

mais, d'après les relations établies plus haut, on a

$$\frac{e^2}{g^2}(1 - \beta_1) = 1 + k^2,$$

$$\frac{3\beta_3 e^4}{g^2} = 6k^2;$$

donc il vient

$$\frac{d^2\rho_1}{dx^2} + (1 + k^2 - 6k^2 \operatorname{sn}^2 x)\rho_1 = \frac{e^2}{g^2}\beta_0'.$$

Les équations qui déterminent $\rho_2, \rho_3, \ldots$ se présenteront d'ailleurs sous la même forme, le second membre seul se trouvant modifié, mais étant toujours une fonction de quantités déjà connues.

Or cette équation privée de second membre rentre dans la classe des équations de Lamé, et l'on sait en trouver l'intégrale générale.

Une première solution particulière connue est $\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$; en considérant toujours l'équation sans second membre et posant $\rho_1 = y \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$, on trouve facilement une seconde solution particulière, savoir

$$\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \int \frac{dx}{\operatorname{cn}^2 x \operatorname{dn}^2 x}.$$

Pour effectuer l'intégration indiquée par cette formule, on fera usage des identités suivantes :

$$\frac{1}{\operatorname{cn}^2 x \operatorname{dn}^2 x} = \frac{1}{k'^2}\frac{1}{\operatorname{cn}^2 x} - \frac{k^2}{k'^2}\frac{1}{\operatorname{dn}^2 x},$$

$$\frac{k'^2}{\operatorname{cn}^2 x} = \frac{\Theta''_1(0)}{\Theta_1(0)} - \frac{d}{dx}\left[\frac{H'_1(x)}{H_1(x)}\right],$$

$$-\frac{k'^2}{\operatorname{dn}^2 x} = \frac{H''_1(0)}{H_1(0)} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)}\right],$$

$$\frac{H'_1(x)}{H_1(x)} = \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} - k'^2\frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}.$$

La solution particulière envisagée devient par suite

$$x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\left[\frac{1}{k'^4}\frac{\Theta''_1(0)}{\Theta_1(0)} + \frac{k^2}{k'^4}\frac{H''_1(0)}{H_1(0)}\right] + \frac{\operatorname{sn} x}{k'^2} - \frac{1+k^2}{k'^4}\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)},$$

et il n'est pas difficile de s'assurer que le coefficient du terme en $x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$, coefficient que nous désignerons par $-\frac{h}{k'^4}$ pour abréger l'écriture, est une quantité de l'ordre de k^2.

Si nous revenons maintenant à la considération de l'équation complète, nous en obtenons immédiatement l'intégrale générale sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\rho_1 = {} & \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\left\{C_1 - \frac{e^2}{g^2}\int\beta'_0\left[\frac{\operatorname{sn} x}{k'^2} - \frac{1+k^2}{k'^4}\frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)}\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x - \frac{h}{k'^4}x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\right]dx\right\}\\ & + \left[\frac{\operatorname{sn} x}{k'^2} - \frac{1+k^2}{k'^4}\frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)}\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x - \frac{h}{k'^4}x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\right]\left(C_2 + \frac{e^2}{g^2}\int\beta'_0 \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\, dx\right),\end{aligned}$$

C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires.

16. En transformant légèrement cette expression, nous écrirons

$$\begin{aligned}\rho_1 = {} & C_1 \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + C_2\left[\frac{\operatorname{sn} x}{k'^2} - \frac{1+k^2}{k'^4}\frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)}\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x - \frac{h}{k'^4}x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\right]\\ & - \frac{e^2}{g^2}\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\int\beta'_0\left[\frac{\operatorname{sn} x}{k'^2} - \frac{1+k^2}{k'^4}\frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)}\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\right]dx\\ & + \frac{e^2}{g^2}\left[\frac{\operatorname{sn} x}{k'^2} - \frac{1+k^2}{k'^4}\frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)}\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\right]\int\beta'_0 \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\, dx\\ & - \frac{e^2}{g^2}\frac{h}{k'^4}\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\int dx\int\beta'_0 \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\, dx;\end{aligned}$$

il faut d'ailleurs avoir soin de remarquer que les intégrales qui figurent dans cette formule ne contiennent plus aucune constante arbitraire.

La quantité β'_0 se présente actuellement comme une série ordonnée suivant les puissances de $\operatorname{sn} x$.

Considérons d'abord la partie de β'_0 qui ne contient que les puissances impaires de $\operatorname{sn} x$; on peut l'écrire

$$b_5 \operatorname{sn}^5 x + b_7 \operatorname{sn}^7 x + \ldots,$$

chacun des coefficients b étant par rapport à l'excentricité d'un ordre marqué par son indice et contenant en outre la masse perturbatrice en facteur. Si l'on introduit cette série à la place de β'_0 dans la valeur de ρ, telle que nous venons de la calculer, et que, pour effectuer les intégrations et les calculs définitifs, on suppose toutes les quantités qui figurent au second membre remplacées par leurs développements en séries procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de l'angle $\frac{\pi x}{2K}$, il est facile de voir que, à part le terme $C_1 \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$, et un terme de la forme $A x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$, l'expression de ρ_1 ne contiendra que des termes de la forme

$$a_{2n+1} \sin(2n+1)\frac{\pi x}{2K}.$$

Si maintenant nous tenons compte de la seconde partie de β'_0, celle qui contient les puissances paires de $\operatorname{sn} x$, et qui par conséquent se présente sous la forme

$$b_0 + b_2 \operatorname{sn}^2 x + b_4 \operatorname{sn}^4 x + \ldots,$$

on voit de même qu'on n'introduit dans l'expression de ρ_1 que des termes de la forme

$$a_{2n} \cos 2n \frac{\pi x}{2K}.$$

Pour se convaincre de l'exactitude de ces affirmations, il suffit de remarquer que les développements des puissances impaires de $\operatorname{sn} x$ et de la quantité $\frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$ procèdent suivant les sinus des multiples impairs de $\frac{\pi x}{2K}$; que les développements des puissances paires de $\operatorname{sn} x$ procèdent au contraire suivant les cosinus des multiples pairs de cet argument, tandis que celui de $\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$ procède suivant les cosinus des multiples impairs du même arc; enfin, que $\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x\, dx$ étant la différentielle même de

$\operatorname{sn} x$, l'intégrale $\int \beta'_0 \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \, dx$ s'effectuera immédiatement et se présentera sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances de $\operatorname{sn} x$, sans contenir aucun terme dans lequel l'argument x figurerait en dehors des signes des fonctions périodiques.

Si donc on suppose, ce qui est possible, comme nous le verrons tout à l'heure, qu'on puisse disposer des constantes introduites par l'intégration de façon que les deux termes $C_1 \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$ et $A x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$ s'évanouissent, on voit que finalement ρ_1 se présentera sous la forme

$$\rho_1 = a_0 + a_1 \sin\frac{\pi x}{2K} + a_2 \cos 2\frac{\pi x}{2K} + a_3 \sin 3\frac{\pi x}{2K} + \ldots;$$

non seulement il ne figure pas de termes séculaires dans cette expression, mais il est facile de voir que les coefficients sont petits par rapport à ρ_0, puisque la masse perturbatrice ne disparaît comme facteur dans aucun d'eux. En outre, les quantités β'_1, β'_2, ... se présentant précisément sous la même forme, il en sera encore de même de β''_0 qui est égale à

$$\beta'_1 \rho_1 + \beta'_2 \rho_1^2 + \beta'_3 \rho_1^3 + \ldots.$$

La forme de l'expression de ρ_2 ne diffère d'ailleurs de celle de ρ_1 donnée ci-dessus, qu'en ce que, sous les signes $\int$, β'_0 doit être remplacé par β''_0; donc les seuls termes de β'_0 qui, par suite de la double intégration, pourraient introduire un terme de la forme $x^2 \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$ sont ceux qui contiendraient le cosinus d'un multiple impair de $\frac{\pi x}{2K}$; d'après ce qui précède, il n'en est pas de tels dans β''_0 : on en conclut que tout ce que nous avons dit de ρ_1 pourra s'appliquer sans modification à ρ_2 : un choix convenable des nouvelles constantes permettra d'exprimer ρ_2 sous la forme d'une série analogue à celle qui représente ρ_1 ; partant, le même résultat s'appliquera à ρ_3, et ainsi de suite. On aura donc réalisé dans cette solution toutes les conditions que nous avons imposées au début.

17. Il nous reste à dire comment on réussira à faire disparaître les deux termes $C_1 \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$ et $A x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$. A cet effet, reprenons l'expression approchée de ρ, telle que nous l'avons obtenue, et écrivons-la sous la forme

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \sqrt{\frac{2}{1}\frac{\beta_1}{\beta_3}} \operatorname{sn} x + C_1 \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$$
$$+ C_2 \left[\frac{\operatorname{sn} x}{k'^2} - \frac{1+k^2}{k'^4} \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x - \frac{h}{k'^4} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \right] + R,$$

en remarquant que $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\sqrt{\frac{2(1-\beta_1)}{\beta_3}}\operatorname{sn}x$ est précisément la valeur de ρ_0 et en désignant par R l'ensemble des termes qui figurent dans l'expression de ρ_1 comme contenant des intégrales non calculées.

Comme on le voit, quatre constantes arbitraires subsistent dans cette expression; d'autre part, ρ dépendant d'une équation différentielle du second ordre ne doit renfermer que deux constantes arbitraires. Il est aisé d'expliquer cette contradiction apparente : la quantité ρ_1 est d'un ordre de grandeur comparable au changement que subit ρ_0, si l'on attribue de petits accroissements aux quantités x_0 et k dont dépend ρ_0; de sorte que, regardant ces accroissements comme des différentielles, l'accroissement correspondant de ρ_1 peut être négligé. Or il est facile de faire voir, et cela doit être nécessairement, d'après le raisonnement précédent, que l'accroissement $d\rho_0$ de ρ_0, quand k et x_0 reçoivent les accroissements dk et dx_0, est précisément de la forme

$$C'_1 \operatorname{cn}x\operatorname{dn}x + C'_2\left(\frac{\operatorname{sn}x}{k'^2} - \frac{1+k^2}{k'^4}\frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)}\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x - \frac{h}{k'^4}x\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x\right),$$

C'_1 et C'_2 étant des constantes.

En effet, on a

$$\rho_0 + d\rho_0 = \frac{k+dk}{\sqrt{1+(k+dk)^2}}\sqrt{\frac{2(1-\beta_1)}{\beta_3}}\operatorname{sn}(x+dx);$$

le module de la fonction elliptique qui figure dans cette formule étant $k+dk$ et non plus k, et dx ayant la signification suivante, nous avons posé

$$x = x_0 + \sqrt{\frac{1-\beta_1}{1+k^2}}\,v;$$

on en tire

$$x + dx = x_0 + dx_0 + \sqrt{\frac{1-\beta_1}{1+(k+dk)^2}}\,v.$$

D'ailleurs, nous n'avons égard qu'aux termes du premier ordre par rapport à dx_0 et dk; il vient, par suite,

$$d\rho_0 = \sqrt{\frac{2(1-\beta_1)}{\beta_3}}\left[\frac{k\,dx}{\sqrt{1+k^2}}\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x + \frac{dk}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{sn}x + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}D_k\operatorname{sn}x\right].$$

d'une série ordonnée suivant les sinus et cosinus des multiples de l'angle $\frac{\pi x}{2K}$ ou $\frac{\pi}{2K}\sqrt{\frac{1-\beta_1}{1+k^2}}\,v$, k recevant sa valeur définitive, et cette série ne renferme aucun terme séculaire. On voit aussi que, en posant

$$\frac{\pi}{2K}\sqrt{\frac{1-\beta_1}{1+k^2}} = 1 - \varsigma,$$

ς représentera le rapport du moyen mouvement des apsides au moyen mouvement du corps considéré, en tant toutefois que l'équation dont nous sommes partis représente effectivement le mouvement de ce corps.

18. A la vérité, comme nous l'avons remarqué au début de ce Chapitre, dans le problème général des perturbations, ce n'est pas l'équation dont nous venons de nous occuper qui se présente. Il existe cependant un cas, entre autres, où les considérations précédentes peuvent trouver leur entière application : c'est celui du mouvement des satellites intérieurs de Saturne, sous l'action de l'anneau et de l'aplatissement de la planète. Ce problème a été traité complètement par M. Tisserand (*Annales de l'Observatoire de Toulouse*, t. I); nous nous proposons ici de retrouver, par une méthode essentiellement différente, les mêmes résultats.

Appelons

a le demi grand axe de l'orbite du satellite considéré;
M la masse de Saturne;
m celle de l'anneau;
a' et a'' les rayons intérieur et extérieur de la couronne circulaire qui sert de base à l'anneau considéré comme un cylindre droit homogène.

M. Tisserand a montré que le mouvement du satellite est un mouvement elliptique (avec la masse centrale $M + m$) altéré par la fonction perturbatrice

$$\Omega = f\left(\frac{\frac{1}{2}kM + B_1 m}{r^3} + \frac{B_2 m}{r^5} + \frac{B_3 m}{r^7} + \ldots\right)$$

où k désigne un certain coefficient dépendant de l'aplatissement de la planète et où les coefficients B sont définis par la formule suivante :

$$B_n = \left(\frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\right)^2 \frac{1}{n+1}\,\frac{a''^{2n+2} - a'^{2n+2}}{a''^2 - a'^2}.$$

Si d'ailleurs e désigne l'excentricité, on déterminera k en écrivant que le maximum de ρ est e, ce qui donne, en ne gardant que les termes les plus importants,

$$e = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\sqrt{\frac{2(1-\beta_1)}{\beta_3}},$$

d'où

$$k^2 = \frac{e^2\beta_3}{2(1-\beta_1) - e^2\beta^3}.$$

Les expressions de β_1 et de β_3 sont les suivantes :

$$\beta_1 = \frac{1}{M+m}\left[\frac{3.2}{a^2p^2}\left(\frac{1}{2}kM + B_1 m\right) + \frac{5.4}{a^4p^4}B_2 m + \frac{7.6}{a^6p^6}B_3 m + \ldots\right],$$

$$\beta_3 = \frac{1}{M+m}\left(\frac{5.4}{a^4p^4}B_2 m + \frac{7.20}{a^6p^6}B_3 m + \ldots\right).$$

Si l'on néglige complètement le carré de l'excentricité dans le résultat final, il vient

$$\varsigma = \frac{1}{2}\beta_1 = \frac{1}{M+m}\left[\frac{1.3}{a^2}\left(\frac{1}{2}kM + B_1 m\right) + \frac{2.5}{a^4}B_2 m + \frac{3.7}{a^6}B_3 m + \ldots\right];$$

c'est précisément la formule à laquelle a été conduit M. Tisserand par l'application de la méthode de la variation des constantes.

CHAPITRE III.

19. Nous avons montré dans le Chapitre précédent comment, dans certains problèmes, ou même en dirigeant les approximations du problème des trois corps d'une certaine façon, on était amené à la considération d'une forme d'équation qui demande une méthode d'intégration particulière. Revenons maintenant aux équations générales du mouvement, telles que nous les avons établies dans le Chapitre I, c'est-à-dire aux équations (7), (9), (13). Les équations (7) et (9) se présentent toutes deux sous la forme

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2y}{dv^2} + Y_1\frac{dy}{dv} + Y_2 y = Y,$$

20. Il est manifeste que, dans les équations relatives à la première approximation et réduites à la forme (2), les coefficients Z_0, Z ne contiennent aucun terme séculaire, c'est-à-dire aucun terme où l'argument v figure en dehors des signes des fonctions périodiques; si l'on peut réussir à intégrer ces équations sans introduire dans les valeurs des inconnues aucun terme séculaire, il en sera encore de même pour les équations relatives à la seconde approximation et aux approximations suivantes. Or l'hypothèse dont nous venons de parler se réalise effectivement, comme nous le montrerons au cours de ce Chapitre; nous pouvons donc supposer que, dans l'équation (2), les fonctions Z et Z_0 sont des séries trigonométriques procédant suivant les cosinus d'arguments de la forme $\lambda v - A$, λ et A étant des constantes.

Mettant en évidence le terme constant dans la fonction Z, nous écrirons l'équation (2) sous la forme

$$\frac{d^2 z}{dv^2} + (\beta_0^{(1)} + Z_1)\, z = Z_0,$$

Z_1 et Z_0 étant définis par les formules suivantes :

$$Z_1 = \beta_1^{(1)} \cos(\lambda_1 v + b_1^{(1)}) + \beta_2^{(1)} \cos(\lambda_2 v + b_2^{(1)}) + \ldots + \beta_s^{(1)} \cos(\lambda_s v + b_s^{(1)}) + \ldots,$$
$$Z_0 = \beta_0^{(0)} + \beta_1^{(0)} \cos(\lambda'_1 v + b_1^{(0)}) + \beta_2^{(0)} \cos(\lambda'_2 v + b_2^{(0)}) + \ldots + \beta_s^{(0)} \cos(\lambda'_s v + b_s^{(0)}) + \ldots.$$

Supposons que, dans Z_1, les seuls termes qui puissent avoir une influence véritable soient les s premiers; en général, d'ailleurs, ce nombre s se réduira à l'unité.

Considérons z comme la somme de $s + 1$ quantités auxiliaires

$$z = z_1 + z_2 + \ldots + z_s + z_{s+1},$$

ces nouvelles quantités étant déterminées respectivement par les équations suivantes

$$\frac{d^2 z_1}{dv^2} + [\beta_0^{(1)} + \beta_1^{(1)} \cos(\lambda_1 v + b_1^{(1)})]\, z_1 = Z_0,$$

$$\frac{d^2 z_2}{dv^2} + [\beta_0^{(1)} + \beta_2^{(1)} \cos(\lambda_2 v + b_2^{(1)})]\, z_2 = -\beta_2^{(1)} \cos(\lambda_2 v + b_3^{(1)})\, z_1,$$

$$\frac{d^2 z_3}{dv^2} + [\beta_0^{(1)} + \beta_3^{(1)} \cos(\lambda_3 v + b_3^{(1)})]\, z_3$$
$$= -\beta_3^{(1)} \cos(\lambda_3 v + b_3^{(1)})\,(z_1 + z_2) - \beta_1^{(1)} \cos(\lambda_1 v + b_1^{(1)})\, z_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

U désignant une fonction connue de v, composée uniquement de termes périodiques.

Faisons remarquer, en passant, que ce type d'équation, au moins pour des valeurs particulières de λ et en supposant nul le second membre, se rencontre dans plusieurs théories mathématiques et y joue un rôle important, en particulier dans l'étude des fonctions cylindriques (1) et aussi dans celle des vibrations d'une membrane tendue (2).

21. C'est en ramenant cette équation fondamentale dans sa nouvelle théorie des perturbations, à l'équation de Lamé, que M. Gyldén a réussi à l'intégrer.

Désignons par k une quantité actuellement indéterminée, et que nous regarderons comme le module d'un système de fonctions elliptiques : soit K l'intégrale complète de première espèce correspondante et changeons la variable indépendante v, en posant

$$\frac{1}{2}(\lambda v + b) = \frac{\pi x}{2K}.$$

Remarquons toutefois que le coefficient λ est supposé positif, et que cette transformation ne doit être faite que si en outre le coefficient β est positif; dans le cas contraire, qui se ramène au premier en augmentant b de π, on poserait

$$\frac{1}{2}(\lambda v + b) = \frac{\pi x}{2K} - \frac{\pi}{2}.$$

L'équation qui nous occupe

$$\frac{d^2 z}{dv^2} + [\beta_0 + \beta\cos(\lambda v + b)]z = U$$

devient alors

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \left[4\frac{\beta_0}{\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 + 4\frac{\beta}{\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\cos 2\frac{\pi x}{2K}\right]z = \frac{4}{\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 U.$$

Or les formules connues pour le développement des puissances des fonc-

(1) HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen*, t. I, p. 404 et 405.
(2) MATHIEU, *Journal de Liouville*, 1868.

A la vérité, le second membre de cette équation dépend de z qui est la fonction inconnue; mais le coefficient de z y est d'un ordre de grandeur assez considérable pour qu'on puisse dans tous les cas remplacer sans inconvénient, dans V, z par une valeur approchée, celle qu'on tirera de l'équation même en faisant abstraction des termes dépendants de z au second membre, par exemple, et par suite regarder V comme une fonction connue de la variable indépendante x.

Considérons d'abord l'équation sans second membre

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]z = 0. \tag{5}$$

On reconnaît ici l'équation de Lamé sous sa forme la plus générale : on en connaît l'intégrale générale depuis les belles et importantes recherches de M. Hermite [*Sur quelques applications des fonctions elliptiques* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 1877 et années suivantes, *passim*)].

Rappelons seulement qu'en posant

$$\Phi(x) = \frac{H(x+\omega)}{\Theta(x)} e^{\left(\mu - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right)x},$$

puis, en désignant par $A_1, A_2, \ldots$ des coefficients dont il est inutile d'écrire les valeurs,

$$F(x) = D^{n-1}\Phi(x) - A_1 D^{n-3}\Phi(x) + A_2 D^{n-5}\Phi(x) + \ldots,$$

l'intégrale générale de l'équation précédente se présente sous la forme

$$z = C_1 F(x) + C_2 F(-x);$$

dans ces formules, μ et ω sont des quantités convenablement déterminées en fonction des coefficients de l'équation et C_1, C_2 sont des constantes arbitraires.

Occupons-nous spécialement du cas où l'on choisit l'unité pour la valeur de n : les formules sont en effet alors les plus simples.

Dans cette hypothèse particulière, la quantité ω est déterminée par la relation

$$h = -1 - k^2 + k^2 \operatorname{sn}^2 \omega$$

On déterminera d'abord la quantité q par la relation

$$q = \frac{\beta}{4\lambda^2}(1-q^2);$$

q étant extrêmement petit, il y aura avantage à résoudre cette équation par approximations successives.

Connaissant q, on déterminera k et le module complémentaire k' par les formules

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{1-q^4-q^8+q^{20}+\ldots}{1+q-q^2-q^5-\ldots},$$

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{1-2q^2+2q^8+2q^{18}+\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots},$$

et aussi $\frac{2K}{\pi}$ par la formule

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \Theta_1(0) = 1+2q+2q^4+2q^9+\ldots.$$

La formule (8) s'écrit ensuite

$$1-k^2\,\mathrm{sn}^2 i\omega = \mathrm{dn}^2 i\omega = \frac{4}{\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\left[\beta_0-\frac{\lambda^2}{4}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2\gamma_0\right];$$

il faut donc calculer la quantité $\frac{1}{4}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2\gamma_0$. Or γ_0 est le terme non périodique du développement de $1-2\,\mathrm{sn}^2 x$ suivant les cosinus des multiples de $\frac{\pi x}{2K}$; donc

$$\gamma_0 = \frac{1}{K}\int_0^K (1-2\,\mathrm{sn}^2 x)\,dx$$

ou, en employant les notations consacrées par l'usage,

$$\gamma_0 = 1-\frac{2J}{k^2K}.$$

Par suite

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2\gamma_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{2Kk}{\pi}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\frac{J}{K}$$
$$= 4q(1+q^2+q^6+q^{12}+\ldots)^4-4\,\frac{q-4q^4+9q^9-16q^{16}+\ldots}{1-2q+2q^4-2q^9+\ldots};$$

développant le second membre en série ordonnée suivant les puissances

gnerons par $\frac{\pi}{2K} i\alpha$, α étant réel; on a

$$\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)} = \frac{\left(\frac{\pi}{K}\right)\left[2q\sin 2\frac{\pi i\omega}{2K} - 4q^4 \sin 4\frac{\pi i\omega}{2K} + \ldots\right]}{1 - 2q\cos 2\frac{\pi i\omega}{2K} + 2q^4\cos 4\frac{\pi i\omega}{2K} - \ldots};$$

α se calculera sans difficulté; en général, on aura une approximation suffisante en prenant

$$\alpha = \frac{4q}{i}\,\frac{\sin 2\frac{\pi i\omega}{2K}}{1 - 2q\cos 2\frac{\pi i\omega}{2K}}\cdots.$$

Cette quantité α joue un rôle prépondérant dans cette théorie; comme nous allons le voir, c'est elle qui fixe la forme des arguments qui figurent dans la solution de l'équation proposée.

Développons, en effet, en série trigonométrique la valeur de z fournie par l'équation (9); pour faire ce calcul, nous négligerons la quatrième puissance de q; il serait d'ailleurs facile de pousser l'approximation aussi loin qu'on voudrait.

On a

$$H(x+i\omega) = 2\sqrt[4]{q}\left[\sin\frac{\pi}{2K}(x+i\omega) - q^2\sin\frac{3\pi}{2K}(x+i\omega)\right],$$

$$\frac{1}{\Theta(x)} = 1 + 2q\cos 2\frac{\pi x}{2K}.$$

Donc

$$\frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)} = 2\sqrt[4]{q}\left[\sin\frac{\pi}{2K}(x+i\omega) + 2q\cos 2\frac{\pi x}{2K}\sin\frac{\pi}{2K}(x+i\omega)\right.$$
$$\left. - q^2\sin\frac{3\pi}{2K}(x+i\omega) - 2q^3\cos 2\frac{\pi x}{2K}\sin\frac{3\pi}{2K}(x+i\omega)\right];$$

en outre, nous avons

$$e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}} = e^{-\frac{\pi}{2K}i\alpha x}.$$

Pour simplifier l'écriture, posons

$$\frac{\pi x}{2K} = \frac{1}{2}(\lambda v + b) = v_0;$$

et que nous remplacions θ_0 par une constante θ définie par l'égalité

$$\theta = \theta_0 - \frac{bg}{\lambda},$$

il vient pour expression définitive de z, en remplaçant v_0 par sa valeur,

$$\begin{aligned} z = \gamma \{ & b_1 \sin(gv - \theta) + a_1 \sin[\lambda v + b - (gv - \theta)] \\ & + b_3 \sin[\lambda v + b + (gv - \theta)] + a_3 \sin[2(\lambda v + b) - (gv - \theta)] + \ldots \}. \end{aligned}$$

24. Sur cette formule, l'importance considérable de la quantité g, c'est-à-dire de α, est mise en complète évidence; dans le cas de l'orbite intermédiaire de la Lune par exemple, c'est elle qui détermine le mouvement séculaire du nœud ou du périgée, selon qu'on détermine la latitude ou le rayon vecteur.

Cette quantité g est voisine de l'unité, puisque, dans l'hypothèse particulière de $\beta = 0$, elle se réduit évidemment à $\sqrt{\beta_0}$; l'équation étant alors en effet $\frac{d^2 z}{dv^2} + \beta_0 z = 0$ a pour intégrale générale $z = \gamma \sin(\sqrt{\beta_0}\, v - \theta)$, γ et θ étant deux constantes arbitraires. Il en résulte que, lorsque q tend vers zéro et par suite que ω augmente au delà de toute limite, la valeur limite de g doit être $\sqrt{\beta_0}$; il est facile de vérifier directement ce résultat, et en même temps d'en conclure une formule plus avantageuse pour le calcul numérique de g que celle donnée précédemment.

Posant

$$\beta_0 + 8\lambda^2 q^2(1 + 2q^2 + 4q^4) + \ldots = 1 + \beta_0',$$

de sorte que β_0' sera très petit, on tire d'une des formules écrites précédemment

$$\sqrt{1 + \beta_0'} = \frac{\lambda}{2} \frac{2K}{\pi} \operatorname{dn} i\omega;$$

on a aussi

$$g = \frac{\lambda}{2}(1 + \alpha).$$

Donc

$$g - 1 = \sqrt{1 + \beta_0'} - 1 + \frac{\lambda}{2}\left(1 + \alpha - \frac{2K}{\pi} \operatorname{dn} i\omega\right);$$

$\sqrt{1 + \beta_0'} - 1$ se développera sans difficulté suivant les puissances de β_0'. Con-

restera fini; la formule précédente nous donne donc immédiatement, comme nous l'avions prévu, pour valeur limite de g,

$$1+\tfrac{1}{2}\beta'_0-\tfrac{1}{8}\beta'^2_0+\ldots,$$

c'est-à-dire $\sqrt{\beta_0}$, puisqu'ici $1+\beta'_0$ ne diffère pas de β_0.

25. Pour achever la solution du problème, en restant toujours dans le même cas, le plus important d'ailleurs, il faut revenir à la considération de l'équation avec second membre (4)

$$\frac{d^2 z}{dx^2}-(2k^2\operatorname{sn}^2 x+h)z=\mathrm{V},$$

V étant une fonction périodique connue de v et contenant aussi des termes de la forme $z\cos 2i\frac{\pi x}{2\mathrm{K}}$, i étant un entier positif; ces termes, nous l'avons dit, seront remplacés par leurs valeurs approchées.

Si d'une façon générale deux intégrales particulières de l'équation sans second membre sont désignées par z_1, z_2, leurs dérivées par z'_1, z'_2, l'intégrale générale de l'équation complète sera, en représentant par C_1 et C_2 deux constantes arbitraires,

$$z=z_1\left(\mathrm{C}_1+\int\frac{z_2\mathrm{V}}{z_2z'_1-z_1z'_2}dx\right)+z_2\left(\mathrm{C}_2-\int\frac{z_1\mathrm{V}}{z_2z'_1-z_1z'_2}dx\right).$$

Dans le cas qui nous occupe, nous avons

$$z_1=\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)}{\Theta(x)}e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x},\qquad z_2=\frac{\mathrm{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)}e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x};$$

par suite,

$$\begin{aligned}z_2z'_1-z_1z'_2=&\frac{\mathrm{H}'(x+i\omega)\mathrm{H}(x-i\omega)-\mathrm{H}'(x-i\omega)\mathrm{H}(x+i\omega)}{\Theta^2(x)}\\&-2\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)\mathrm{H}(x-i\omega)}{\Theta^2(x)}.\end{aligned}$$

Or l'équation différentielle que nous envisageons manque du terme en $\frac{dz}{dx}$; donc $z_2z'_1-z_1z'_2$ est indépendant de x, et, pour en calculer plus facile-

Si donc v'_0 est de la forme $\lambda' v_0 - A'$, λ' et A' étant des constantes, on aura

$$\int \frac{H(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} V\,dx$$
$$= -\sqrt[4]{q}\,\frac{2K}{\pi}\Bigg[\frac{b_1}{(1+\alpha)+\lambda'} e^{(1+\alpha)iv_0+iv'_0} + \frac{b_1}{(1+\alpha)-\lambda'} e^{(1+\alpha)iv_0-iv'_0}$$
$$- \frac{a_1}{-(1-\alpha)+\lambda'} e^{-(1-\alpha)iv_0+iv'_0} - \frac{a_1}{-(1-\alpha)-\lambda'} e^{-(1-\alpha)iv_0-iv'_0} + \ldots\Bigg];$$

donc

$$-\frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \int \frac{H(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} V\,dx$$
$$= \frac{\sqrt{q}}{i}\,\frac{2K}{\pi}\Bigg\{\frac{a_1 b_1}{(1+\alpha)+\lambda'} e^{2iv_0+iv'_0} + \frac{a_1 b_1}{(1+\alpha)-\lambda'} e^{2iv_0-iv'_0}$$
$$+ \frac{a_1 b_1}{-(1-\alpha)+\lambda'} e^{-2iv_0+iv'_0} + \frac{a_1 b_1}{-(1-\alpha)-\lambda'} e^{-2iv_0-iv'_0}$$
$$- \left[\frac{a_1^2}{-(1-\alpha)+\lambda'} + \frac{b_1^2}{(1+\alpha)+\lambda'}\right] e^{iv'_0}$$
$$- \left[\frac{a_1^2}{-(1-\alpha)-\lambda'} + \frac{b_1^2}{(1+\alpha)-\lambda'}\right] e^{-iv'_0} + \ldots\Bigg\}.$$

Le terme $\frac{H(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \int \frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} V\,dx$ se déduisant de celui que nous venons de calculer en changeant le signe et remplaçant i par $-i$, on voit immédiatement que la somme de ces deux termes, c'est-à-dire la quantité que nous avons en vue, sera, après les réductions faites,

$$\frac{2\sqrt{q}}{i}\,\frac{2K}{\pi}\Bigg\{\left[\frac{a_1 b_1}{(1+\alpha)+\lambda'} + \frac{a_1 b_1}{-(1-\alpha)-\lambda'}\right]\cos(2v_0+v'_0)$$
$$+ \left[\frac{a_1 b_1}{(1+\alpha)-\lambda'} + \frac{a_1 b_1}{-(1-\alpha)+\lambda'}\right]\cos(2v_0-v'_0)$$
$$- \left[\frac{a_1^2}{-(1-\alpha)+\lambda'} + \frac{a_1^2}{-(1-\alpha)-\lambda'} + \frac{b_1^2}{(1+\alpha)+\lambda'} + \frac{b_1^2}{(1+\alpha)-\lambda'}\right]\cos v'_0 + \ldots\Bigg\}.$$

Pour abréger, nous avons négligé dans ces formules tous les termes dépendant de a_3 et b_3 : ce qui pourra d'ailleurs se faire dans la plupart des cas, la fonction V étant, en général, petite.

26. Enfin, pour terminer ce que nous avons à dire au sujet de l'équation qui nous occupe, il est nécessaire de faire avec M. Gyldén deux remarques

de la plus haute importance, et qui nous permettront de pousser l'exactitude des calculs le plus loin possible.

En premier lieu, on conçoit que, quand on aura affaire aux équations de la seconde approximation et des suivantes, il pourra exister dans la fonction V, qui forme le second membre, des termes tels que $\gamma_0 \sin(g_0 v - \theta)$, g_0 étant une valeur approchée de la véritable valeur du coefficient g; la dernière formule du précédent paragraphe permet de vérifier immédiatement que ces termes introduisent dans l'expression finale de z de petits diviseurs d'intégration, affectant des termes à très longue période; ils ont, par suite, une influence considérable sur la détermination exacte de la solution, et il est du plus haut intérêt de les éviter; c'est à quoi l'on parvient à l'aide de l'artifice suivant.

Ajoutons aux deux membres de l'équation

$$\frac{d^2 z}{dv^2} + z[\beta_0 + \beta \cos(\lambda v + b)] = U$$

la même quantité $\Delta\beta_0 z$; mettant en évidence au second membre le terme dont nous voulons éliminer l'influence, il vient

$$\frac{d^2 z}{dv^2} + [1 + \beta_0 + \Delta\beta_0 + \beta \cos(\lambda v + b)]z = \gamma_0 \sin(g_0 v - \theta) + \Delta\beta_0 z + U_1,$$

U_1 ne renfermant plus le terme en question. Au second membre, remplaçons z par $e_0 \sin(g_0 v - \theta) + z_1$, e_0 étant le coefficient du terme $\sin(g_0 v - \theta)$ dans la série qui représente la valeur approchée connue de z; il est clair que z_1 sera une quantité très petite et qu'on pourra tout d'abord négliger, quitte à en tenir compte ensuite par les méthodes ordinaires. Déterminons maintenant la quantité $\Delta\beta_0$ par la condition

$$e_0 \Delta\beta_0 + \gamma_0 = 0;$$

on voit que le terme considéré a disparu au second membre de la nouvelle équation; cette nouvelle équation ne diffère d'ailleurs de l'ancienne que par une modification dans le coefficient β_0. Lorsque les termes que nous venons d'envisager se présenteront, il faudra donc commencer par faire subir cette correction au coefficient β_0.

En second lieu, nous avons annoncé que l'on pouvait éviter, dans l'intégration des équations successives qui déterminent des valeurs de z de plus

en plus approchées, l'introduction des termes séculaires; c'est cette assertion qu'il s'agit maintenant de mettre en lumière.

Il est manifeste tout d'abord qu'il faut distinguer dans la fonction V deux sortes de termes : ceux qui sont connus avant l'intégration et ceux qui sont multipliés par z, termes qui, nous l'avons déjà fait remarquer, sont de la forme

$$z\left(\alpha_4 \cos 4\frac{\pi x}{2K} + \alpha_6 \cos 6\frac{\pi x}{2K} + \ldots\right).$$

Les premiers termes, que nous avons envisagés plus haut, n'introduisent aucun terme séculaire dans la valeur de z; il n'en est pas de même des autres. Si, en effet, nous remplaçons dans ceux-là z par sa valeur tirée de l'équation sans second membre

$$C_1 \frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} + C_2 \frac{H(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}$$

et si nous ne conservons que les termes susceptibles de fournir dans l'expression finale de z des termes séculaires, nous voyons que notre attention doit se porter tout entière sur l'unique groupe suivant, où A désigne un facteur constant,

$$\begin{aligned} &AC_1 \frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \int \frac{H(x+i\omega)\,H(x-i\omega)}{\Theta^2(x)} \left(\alpha_4 \cos 4\frac{\pi x}{2K} + \ldots\right) dx, \\ -&AC_2 \frac{H(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} \int \frac{H(x+i\omega)\,H(x-i\omega)}{\Theta^2(x)} \left(\alpha_4 \cos 4\frac{\pi x}{2K} + \ldots\right) dx. \end{aligned}$$

Or on a la formule

$$\frac{H(x+i\omega)\,H(x-i\omega)}{\Theta^2(x)} = \frac{k\,\Theta^2(i\omega)}{\Theta^2(0)} (\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 i\omega)$$

et

$$\mathrm{sn}^2 x = \text{const.} - \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \frac{1}{k^2} \left(\frac{8q}{1-q^2} \cos 2\frac{\pi x}{2K} + \frac{16q^2}{1-q^4} \cos 4\frac{\pi x}{2K} + \ldots\right).$$

On obtient, par suite, les termes séculaires suivants

$$x \sum \left[-A\alpha_s \left(\frac{\pi x}{2K}\right)^2 \frac{\Theta^2(i\omega)}{k\Theta^2(0)} \frac{4sq^s}{1-q^s}\right] \left[C_1 \frac{H(x+i\omega)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x} - C_2 \frac{H(x-i\omega)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}\right],$$

c'est-à-dire un groupe de la forme

$$\mathrm{B}x\left[\mathrm{C}_1\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)}{\Theta(x)}e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}-\mathrm{C}_2\frac{\mathrm{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)}e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}\right].$$

Nous allons faire voir maintenant que, à l'aide d'une légère modification dans la valeur de ω, on peut se dispenser de tenir compte de ces termes. Si, en effet, dans la formule qui donne z, on augmente ω de $d\omega$, la valeur de z_ν prend un certain accroissement dz, dont la partie séculaire, il est facile de le vérifier, provient uniquement de la variation du coefficient $\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}$ dans la partie de z qui est fournie par l'équation sans second membre. Si l'on n'a égard qu'à cette partie séculaire, on a

$$dz=-x\left[\mathrm{C}_1\frac{\mathrm{H}(x+i\omega)}{\Theta(x)}e^{-\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}-\mathrm{C}_2\frac{\mathrm{H}(x-i\omega)}{\Theta(x)}e^{\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}x}\right]\frac{d^2\log\Theta(i\omega)}{i\,d\omega^2}\,d\omega;$$

il en résulte immédiatement que, en déterminant $d\omega$ par la formule

$$\frac{d^2\log\Theta(i\omega)}{i\,d\omega^2}\,d\omega+\mathrm{B}=0,$$

on pourra, en introduisant dans toutes les formules précédentes $\omega+d\omega$ à la place de ω, faire abstraction des termes séculaires introduits par la considération des termes multipliés par z dans la fonction V. Il faudra d'ailleurs avoir soin de tenir compte des termes périodiques multipliés par $d\omega$, introduits par cette modification.

Remarquons enfin que nous avons pu, à bon droit, traiter $d\omega$ comme une différentielle, le coefficient B étant, comme on le voit immédiatement, extrêmement petit; il suffit de se reporter aux formules précédentes et à l'expression des coefficients α_s.

27. Revenant maintenant à l'équation (5) et aux formules (6) et (7), supposons qu'on se trouve dans le cas qui correspond à l'équation (13) du Chapitre I, c'est-à-dire que β_0 est, comme β_1, de l'ordre de la masse perturbatrice; la formule (6) nous montre alors que $k^2\,\mathrm{sn}^2\omega$ est très voisin de l'unité et que, selon les cas, on a $k^2\,\mathrm{sn}^2\omega<1$ ou $k^2\,\mathrm{sn}^2\omega>1$. Dans la première de ces hypothèses, ω est de la forme $\mathrm{K}+ib$, b étant réel et voisin

de K′; dans la seconde, ω est de la forme $a + i\mathrm{K}'$, a étant réel et voisin de K.

Dans le cas intermédiaire, traité par M. Gyldén, ω est égal à $\mathrm{K} + i\mathrm{K}'$; mais alors la solution de l'équation, telle qu'elle est fournie par la formule (7), devient illusoire; on se trouve dans l'un des cas où l'équation de Lamé s'intègre par les fonctions doublement périodiques proprement dites; d'ailleurs la solution contient un terme proportionnel à x.

Examinons rapidement ce qui distinguera les deux cas que nous venons de signaler de celui que nous avons traité dans les paragraphes précédents.

En premier lieu, soit $\omega = \mathrm{K} + ib$; en partant des formules

$$\mathrm{H}(x + \mathrm{K} + ib) = \mathrm{H}_1(x + ib),$$

$$\frac{\Theta'(\mathrm{K} + ib)}{\Theta(\mathrm{K} + ib)} = \frac{\Theta'_1(ib)}{\Theta_1(ib)},$$

on voit que la valeur de z (en faisant abstraction du second membre) sera de la forme

$$z = \mathrm{C}_1 \frac{\mathrm{H}_1(x + ib)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'_1(ib)}{\Theta_1(ib)}x} + \mathrm{C}_2 \frac{\mathrm{H}_1(x - ib)}{\Theta(x)} e^{\frac{\Theta'_1(ib)}{\Theta_1(ib)}x}. \tag{10}$$

La comparaison de cette formule avec la formule (9) nous montre des analogies trop grandes entre les deux cas correspondants pour qu'il soit nécessaire de poursuivre en détail le développement de la formule (10). Remarquons seulement que, b étant voisin de K′, la fonction $\frac{\Theta'_1(ib)}{\Theta_1(ib)}$ sera voisine de $\frac{\Theta'_1(i\mathrm{K}')}{\Theta_1(i\mathrm{K}')}$, c'est-à-dire de $-\frac{i\pi}{2\mathrm{K}}$; la quantité qui correspond à ce que nous avons désigné précédemment par α sera donc voisine de -1, ce qui introduit, on le voit immédiatement, dans la valeur de z des termes à longue période.

En second lieu, plaçons-nous dans l'hypothèse où ω est de la forme $a + i\mathrm{K}'$. Partant des formules

$$\mathrm{H}(x + a + i\mathrm{K}') = \quad i\Theta(x + a) e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x + 2a + i\mathrm{K}')},$$

$$\mathrm{H}(x - a - i\mathrm{K}') = -i\Theta(x - a) e^{\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x - 2a - i\mathrm{K}')}.$$

$$\frac{\Theta'(a + i\mathrm{K}')}{\Theta(a + i\mathrm{K}')} = \frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)} - \frac{i\pi}{2\mathrm{K}},$$

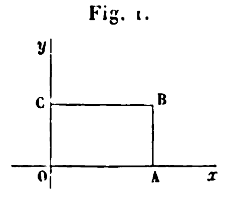
on voit que z peut se mettre sous la forme

$$z = C_1 \frac{\Theta(x+a)}{\Theta(x)} e^{-\frac{H'(a)}{H(a)}x} + C_2 \frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x)} e^{\frac{H'(a)}{H(a)}x}. \tag{11}$$

De même que les formules (9) et (10) ont entre elles la plus grande analogie, de même celle-ci correspond à la formule (7) dans le cas que nous avons seul laissé de côté, celui où ω est réel. Dans ces deux cas, la solution de l'équation (5), telle que nous l'avons présentée, est à rejeter; car, comme le montrent les exponentielles réelles qui figurent dans les formules (7) et (9), les termes séculaires sont impossibles à éviter; il faudra recourir alors à d'autres méthodes. Hâtons-nous d'ajouter que ces deux cas se présenteront très rarement en Astronomie; sans exceptions, pour ainsi dire, les équations qu'on aura à intégrer se présenteront sous une forme permettant l'application de la méthode que nous venons d'exposer ou, tout au moins, pouvant se ramener sans difficulté à cette forme.

Si l'on représente la quantité ω dans un plan à la façon des variables complexes, selon les valeurs des constantes qui figurent dans la formule (6), son affixe pourra être un point quelconque du périmètre du parallélogramme OABC (*fig.* 1) de côtés 2K, 2K′ construit sur les axes. La méthode que nous venons d'exposer ne sera avantageusement applicable que si ω est représenté par un point d'un des deux côtés verticaux OC, AB.

Fig. 1.



CHAPITRE IV.

28. Pour mieux faire comprendre les développements qui précèdent et mettre en lumière le progrès réalisé par M. Gyldén, nous allons intégrer les équations de l'orbite intermédiaire de la Lune, telles que nous les avons établies à la fin du Chapitre I.

Envisageons d'abord l'équation (14) qui détermine la latitude

$$\frac{d^2s}{dv^2} - \frac{3}{2}\mu^2\sin(\lambda v - A)\frac{ds}{dv} + s\left[1 + \frac{3}{2}\mu^2 + \frac{3}{2}\mu^2\cos(\lambda v - A)\right] = 0.$$

Nous réduirons cette équation à la forme canonique en posant

$$s = z\,e^{\frac{3}{4}\mu^2\int\sin(\lambda v - A)\,dv} = z\,e^{\frac{3\mu^2}{4\lambda}\cos(\lambda v - A)};$$

avec une exactitude suffisante on aura

$$s = z\left[1 - \frac{3\mu^2}{4\lambda}\cos(\lambda v - A)\right];$$

quant à l'équation réduite, ce sera, en négligeant toujours les termes d'ordre supérieur au troisième,

$$\frac{d^2z}{dv^2} + \left[1 + \frac{3}{2}\mu^2 + \frac{3}{2}\mu^2\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)\cos(\lambda v - A)\right]z = 0;$$

en posant $U = 0$,

$$\beta_0 = 1 + \tfrac{3}{2}\mu^2,$$
$$\beta = \frac{3}{2}\mu^2\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right),$$

nous serons ramenés à l'équation (3) du Chapitre précédent, dont nous adopterons toutes les notations : disons tout de suite aussi qu'on pourra négliger le second membre introduit par la transformation qui ramène cette équation à l'équation de Lamé.

Les calculs sont effectués avec six décimales, afin de déterminer ω avec une précision suffisante.

Avec Laplace, faisons $\mu = 0,0748013$ (*Mécanique céleste*, Liv. VII, n° 16); comme nous l'avons fait remarquer déjà, ce nombre est différent de celui que, dans la théorie de M. Gyldén, et après lui de M. Shdanow, joue le même rôle, et qui a pour valeur $0,0754383$: ceci provient de ce que le nombre que nous adoptons est le rapport de la durée de la révolution sidérale de la Lune à celle de la révolution du Soleil, tandis que le nombre adopté par M. Gyldén est le rapport de la durée de la révolution anomalistique de la Lune à celle de la révolution sidérale du Soleil.

Nous avons

$\log \mu$	[illegible]	$\log$ [illegible] $- 1$ ...	[illegible]
$\log 1 - \mu = \log \frac{\lambda}{2}$ ...	[illegible]	$\log$ [illegible]	[illegible]
$\log \lambda$	[illegible]		
$\log q$	[illegible]		
$\log$ [illegible]	[illegible]	$\log \frac{2K}{\pi}$	[illegible]
$\log$ [illegible]	[illegible]		
$\log$ [illegible]	[illegible]		
$\log \operatorname{dn}$ [illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\log e^{\frac{\pi w}{2K}}$	[illegible]		
$\log e^{-\frac{\pi w}{2K}}$	[illegible]		

$$g - 1 = \text{[illegible]}.$$

La valeur exacte de cette quantité est 0,004022 : nous la trouvons en première approximation avec une erreur égale à peu près à la soixante-dixième partie de sa valeur.

Achevant le calcul en ne conservant que cinq décimales, nous avons

$$\log b_1 = 0{,}77004, \qquad \log a_1 = \bar{1}{,}21181 ;$$

les autres coefficients peuvent être négligés : finalement

$$z = \gamma \{ b_1 \sin(gv - \theta) + a_1 \sin[(\lambda v - A) - (gv - \theta)] \}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} s &= \gamma \left\{ \left(b_1 + \frac{3}{8} a_1 \frac{\mu^2}{\lambda} \right) \sin(gv - \theta) + \left(a_1 + \frac{3}{8} b_1 \frac{\mu^2}{\lambda} \right) \sin[\lambda v - A - (gv - \theta)] \right\} \\ &= \gamma [A_1 \sin(gv - \theta)] + B_1 \sin[\lambda v - A - (gv - \theta)], \end{aligned}$$

en faisant

$$\log A_1 = 0{,}77005, \qquad \log B_1 = \bar{1}{,}22926.$$

Le rapport $\frac{B_1}{A_1}$ est précisément le coefficient désigné par Laplace par $B_1^{(0)}$ ans sa théorie de la Lune ; il est ici égal à 0,002879 ; Laplace donne pour

sa valeur 0,002826 : la principale inégalité de la latitude de la Lune se trouve donc déterminée par une seule approximation, et sans aucune hypothèse préalable sur la forme analytique de s à un cinquantième près de sa valeur. Pour déterminer γ, qui est une constante d'intégration, nous ferons, notre but étant la comparaison de nos résultats avec ceux de Laplace : $\gamma A_1 = 0,0900807$; ce nombre est en effet le coefficient du terme $\sin(gv-\theta)$ dans la valeur de s donnée par Laplace; il vient ainsi

$$\log\gamma = \bar{2},18458,$$

et, si l'on pose

$$s = s_0 \sin(gv-\theta) + s_1 \sin[(\lambda v - A) - (gv-\theta)],$$

on a

$$\log s_0 = \bar{2},95463, \qquad \log s_1 = \bar{3},41384.$$

29. Passons à la détermination du rayon vecteur; on a l'équation

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + \left(\frac{12\mu^2}{\lambda^2-1} - \frac{3}{2}\mu^2\right)\sin(\lambda v - A)\frac{d\rho}{dv} + \rho\left[1 - \frac{3}{2}\mu^2 - \left(\frac{9}{2}\mu^2 + \frac{12\lambda\mu^2}{\lambda^2-1}\right)\cos(\lambda v - A)\right]$$
$$= -\tfrac{3}{2}s^2 - \tfrac{1}{2}\mu^2(1+3\rho')[1+3\cos(\lambda v - A)] - \tfrac{3}{2}\mu^2 E\sin(\lambda v - A)$$
$$+ 3\mu^2\int(1+3\rho')\sin(\lambda v - A)\,dv + 3\mu^2\int E\cos(\lambda v - A)\,dv,$$

en posant

$$E = -4\int\rho'\,dv' \qquad \text{et} \qquad \rho' = \varepsilon'\cos(c'v' - \varpi').$$

Cette équation doit d'abord être réduite à la forme canonique. Posant

$$\rho = z e^{\left(\frac{3}{4}\mu^2 - \frac{6\mu^2}{\lambda^2-1}\right)\int\sin(\lambda v - A)\,dv}$$

ou, avec une approximation suffisante,

$$\rho = z\left[1 + \frac{3\mu^2}{\lambda}\left(\frac{2}{\lambda^2-1} - \frac{1}{4}\right)\cos(\lambda v - A)\right],$$

et, négligeant tous les termes d'ordre supérieur au quatrième, il vient, pour équation réduite, en posant $b = \pi - A$, et désignant par U le second membre

de l'équation précédente.

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} - \text{[illegible]} = 0$$

où $\beta_1 = 1 - \frac{1}{2}\mu^2$ et $\beta = \frac{3}{2}\mu^2$ [illegible].

Calculons U. On a d'abord, en faisant $\rho = 1$ en dehors du signe cos,

$$Z = -\mu e \sin(cv - \varpi)$$

donc

$$\begin{aligned} U = -\frac{1}{2}s_1^2 - \frac{1}{2}\mu^2 - \frac{1}{2}s_1^2 \text{[illegible]} - \frac{3}{2}\text{[illegible]}\cos(\lambda v - b) - \frac{3}{2}\mu^2 e \cos(cv - \varpi) \\ - \frac{3}{2}\mu^2 e \cos(cv - \varpi)\cos(\lambda v - b) - 3\mu^2 e \sin(cv - \varpi)\sin(\lambda v - b) \\ - 3\mu^2 e \int [3\cos(cv - \varpi)\sin(\lambda v - b) - 2\sin(cv - \varpi)\cos(\lambda v - b)]\,dv. \end{aligned}$$

Les termes du troisième ordre dans U sont d'une importance minime par le calcul exact de ρ; mais leur influence est considérable pour la détermination exacte du temps. Comme on ne peut prétendre obtenir, dès la première approximation, une valeur exacte du temps, nous ne garderons dans U que les termes du second ordre, et ceux seulement du troisième qui ont la plus grande importance dans la détermination du temps, et en particulier de l'inégalité connue sous le nom d'*équation annuelle*.

En conséquence, nous ferons simplement

$$\begin{aligned} U = -\tfrac{1}{2}s_1^2 - \tfrac{1}{2}\mu^2 - \tfrac{1}{2}s_1^2\cos 2(gv - \theta) \\ - \frac{3}{2}\mu^2\left(1 - \frac{2}{\lambda}\right)\cos(\lambda v - b) - \frac{3}{2}\mu^2 e' \cos(c'v' - \varpi'). \end{aligned}$$

D'ailleurs, il est nécessaire de le répéter, il ne faut pas s'attendre à obtenir avec une grande précision le coefficient de l'équation annuelle : on en aura seulement la partie principale; sur la détermination de ρ, au contraire, les termes que nous venons de négliger n'ont pas d'influence sensible au degré d'approximation que nous poursuivons.

Intégrons d'abord l'équation sans second membre; nous adoptons les notations du Chapitre III, en remplaçant toutefois les lettres g et θ, déjà employées, par c et $\varpi - \frac{\pi}{2}$.

Il vient alors

$$
\begin{aligned}
&\log(1-\beta_0) = \bar{3},923909,\\
&\log\beta \qquad = \bar{2},974494,\\
&\log q \qquad = \bar{3},837883, \qquad \log k \;= \bar{1},509162,\\
&\log\frac{2K}{\pi} \quad = 0,011878, \qquad \log k' = \bar{1},976079,\\
&\log\beta'_0 \qquad = \bar{3},850915\,n,\\
&\log dni\omega \quad = 0,020341, \qquad \frac{\pi}{4}-\varphi = 2^\circ 7' 43'',57,\\
&\log e^{\frac{\pi\omega}{2K}} \quad = 0,358297,\\
&\log e^{-\frac{\pi\omega}{2K}} \quad = \bar{1},641703, \qquad \log\alpha = \bar{2},855637,\\
&\qquad\qquad 1-c = 0,008447.
\end{aligned}
$$

La valeur exacte de cette quantité est 0,008452; l'erreur que nous avons commise est donc pour ainsi dire insensible, et nous obtenons avec une grande précision le mouvement du périgée lunaire.

Il vient ensuite

$$
\begin{aligned}
&\log a_1 = \bar{1},62584, \qquad \log a_2 = \bar{3},4790,\\
&\log b_1 = 0,35772, \qquad \log b_2 = \bar{2},1803,
\end{aligned}
$$

de sorte que, abstraction faite des termes provenant de U, z se met sous la forme

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\{b_1\cos(cv-\varpi)+a_1\cos[\lambda v - \mathrm{A} - (cv-\varpi)]\\
&\quad - b_2\cos[\lambda v - \mathrm{A} + (cv-\varpi)] - a_2\cos[2(\lambda v-\mathrm{A}) - (cv-\varpi)] + \ldots\},
\end{aligned}
$$

ε désignant comme ϖ une constante d'intégration.

Calculons maintenant les termes qui proviendront de l'action de U; la fonction V du Chapitre précédent est égale à $\frac{4}{\lambda^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 \mathrm{U}$; écrivant donc V sous la forme

$$
2d_0 + 2d_2\cos(2gv-2\theta) + 2d_1\cos(\lambda v + b) + 2d_3\cos(c'v' - \varpi'),
$$

nous aurons

$$
\begin{aligned}
&\log d_0 = \bar{3},69132\,n, \qquad \log d_2 = \bar{3},52706,\\
&\log d_1 = \bar{3},98489, \qquad \log d_3 = \bar{5},89232\,n;
\end{aligned}
$$

d_3 a été calculé en prenant pour ε' la valeur que donne Laplace, savoir

$$0,0016814.$$

Nous allons calculer les termes correspondant à V dans z, et, dans ce calcul, nous négligerons a_3 et b_3, ainsi que nous l'avons expliqué au Chapitre précédent; il est en effet sans intérêt, dans cette approximation, de tenir compte de ces termes. Nous appliquerons donc simplement les formules données au Chapitre III.

Posons

$$A = \frac{2K}{\pi}\frac{\sqrt{q}}{i}\frac{\Theta^2(0)\Theta(i\omega)}{k'H(i\omega)H_1(i\omega)\Theta_1(i\omega)};$$

la partie de z due à V sera

$$A\left\{\begin{aligned}
&d_0\left[\frac{2a_1^2}{1-\alpha}-\frac{2b_1^2}{1+\alpha}+2a_1b_1\left(\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1-\alpha}\right)\cos(\lambda v+b)+\ldots\right]\\
&+d_2\left[\left(\frac{a_1^2}{1-\alpha-\frac{4g}{\lambda}}+\frac{a_1^2}{1-\alpha+\frac{4g}{\lambda}}-\frac{b_1^2}{1+\alpha+\frac{4g}{\lambda}}-\frac{b_1^2}{1+\alpha-\frac{4g}{\lambda}}\right)\cos(2gv-2\theta)+\ldots\right]\\
&+d_1\left[\frac{a_1b_1}{1+\alpha}-\frac{a_1b_1}{1-\alpha}-\left(\frac{a_1^2}{1+\alpha}-\frac{a_1^2}{3-\alpha}+\frac{b_1^2}{3+\alpha}-\frac{b_1^2}{1-\alpha}\right)\cos(\lambda v+b)+\ldots\right]\\
&+d_3\left[\left(\frac{a_1^2}{1-\alpha-\frac{2c'\mu}{\lambda}}+\frac{a_1^2}{1-\alpha+\frac{2c'\mu}{\lambda}}-\frac{b_1^2}{1+\alpha+\frac{2c'\mu}{\lambda}}-\frac{b_1^2}{1+\alpha-\frac{2c'\mu}{\lambda}}\right)\cos(c'v'-\varpi')+\ldots\right]\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}.$$

Les termes que nous avons omis sont sans influence pour le but que nous poursuivons.

Le coefficient A se calculera par les formules données dans le Chapitre précédent, et, en représentant la partie de z due à V par

$$a_0 + a_2\cos 2(gv-\theta) + b_0\cos(\lambda v - A) + b_2\cos(c'v'-\varpi') + \ldots,$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
&\log A = \bar{1},29123\,n,\\
&\log a_0 = \bar{3},9384\ \ n, \qquad \log b_0 = \bar{3},8716,\\
&\log a_2 = \bar{3},3009\ \ n, \qquad \log b_2 = \bar{4},1548\,n.
\end{aligned}$$

Enfin on obtiendra la valeur de ρ par la formule

$$\rho = z\left[1+\frac{3\mu^2}{\lambda}\left(\frac{2}{\lambda^2-1}-\frac{1}{4}\right)\cos(\lambda v - A)\right] = z[1+2\beta_1\cos(\lambda v - A)],$$

où

$$\log\beta_1 = \bar{3},41636.$$

Donc, puisque

$$z = a_0 + a_2\cos 2(gv - \theta) + b_0\cos(\lambda v - A) + b_1\varepsilon\cos(cv - \varpi)$$
$$+ a_1\varepsilon\cos[(\lambda v - A) - (cv - \varpi)] - b_3\varepsilon\cos(\lambda v - A + cv - \varpi) + b_2\cos(c'v' - \varpi') + \ldots,$$

le terme qui a pour coefficient $a_3\varepsilon$ étant négligeable, il vient, en ne gardant que les termes d'ordre inférieur,

$$\rho = a_0 + b_0\beta_1 + a_2\cos 2(gv - \theta) + (b_0 + 2a_0\beta_1)\cos(\lambda v - A)$$
$$+ b_1\varepsilon + a_1\beta_1\varepsilon - b_3\beta_1\varepsilon)\cos(cv - \varpi) + (a_1\varepsilon + b_1\beta_1\varepsilon)\cos[\lambda v - A - (cv - \varpi)]$$
$$- (b_3\varepsilon - b_1\beta_1\varepsilon)\cos[\lambda v - A + (cv - \varpi)] + b_2\cos(c'v' - \varpi') + \ldots$$

ou

$$\rho = A_0 + A_1\cos 2(gv - \theta) + A_2\cos(\lambda v - A) + A_3\cos(c'v' - \varpi')$$
$$+ B_1\varepsilon\cos(cv - \varpi) + B_2\varepsilon\cos[\lambda v - A - (cv - \varpi)] + B_3\varepsilon\cos[\lambda v - A + (cv - \varpi)] + \ldots,$$

et l'on a

$$\log A_0 = \bar{3},9374\,n, \qquad \log B_1 = 0,35792,$$
$$\log A_1 = \bar{3},3009\,n, \qquad \log B_2 = \bar{1},63191,$$
$$\log A_2 = \bar{3},8690, \qquad \log B_3 = \bar{3},9639\,n.$$
$$\log A_3 = \bar{4},1548\,n;$$

30. Arrivons enfin à la détermination du temps, qui nous permettra, par la comparaison avec les observations, de déterminer des valeurs fort approchées des constantes ε et p, ce qui est le but principal de cette première approximation.

Nous avons

$$dt = \frac{dv}{hu^2\sqrt{1 + 2\int \frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dv}{h^2u^2}}}$$

et

$$hu^2 = \sqrt{\mu_1 ap}\,\frac{(1+\rho)^2}{a^2p^2} = \sqrt{\frac{\mu_1}{a^3}}\,\frac{1}{p^{\frac{3}{2}}}(1+\rho)^2 = \frac{n}{p^{\frac{3}{2}}}(1+\rho)^2.$$

Donc, en négligeant le carré de l'intégrale $\int \frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dv}{h^2u^2}$, qui est du qua-

trième ordre,

$$\frac{n\,dt}{dv} = p^{\frac{3}{2}}(1+\rho)^{-2}\left(1 - \int \frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dv}{h^2u^2}\right)$$

ou

$$\frac{n\,dt}{dv} = p^{\frac{3}{2}}(1 - 2\rho + 3\rho^2 - 4\rho^3)\left(1 - \int \frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dv}{h^2u^2}\right);$$

d'ailleurs, en faisant $\frac{p^3}{p'^3}$ égal à l'unité, comme nous l'avons fait jusqu'ici,

$$\int \frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dv}{h^2u^2} = -\frac{3}{2}\mu^2\int(1 + 3\rho' - 4\rho)\sin 2(v - v')\,dv;$$

nous ferons encore

$$2(v - v') = \lambda v - A,$$

négligeant E qui fournirait des termes du troisième ordre, il est vrai, mais dont les arguments $\lambda v - A \pm (c'v - \varpi')$ ont été négligés jusqu'ici; pour la même raison, nous négligerons le terme en ρ' dans l'élément différentiel de l'intégrale précédente; en résumé, nous avons

$$\int \frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dv}{h^2u^2} = \frac{3}{2\lambda}\mu^2\cos(\lambda v - A) + 6\mu^2\int \rho\sin(\lambda v - A)\,dv$$

et nous réduirons d'ailleurs, dans la dernière intégrale, ρ à sa partie principale

$$A_0 + B_1\varepsilon\cos(cv - \varpi) + B_2\varepsilon\cos[(\lambda v - A) - (cv - \varpi)],$$

de sorte que finalement

$$\begin{aligned}\int \frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{dv}{h^2u^2} = {} & \frac{3\mu^2}{2\lambda}(1 - 4A_0)\cos(\lambda v - A) - \frac{3\mu^2 B_2\varepsilon}{c}\cos(cv - \varpi)\\ & - \frac{3\mu^2 B_1\varepsilon}{\lambda - c}\cos[(\lambda v - A) - (cv - \varpi)] - \frac{3\mu^2 B_1\varepsilon}{\lambda + c}\cos[\lambda v - A + (cv - \varpi)]\\ & - \frac{3\mu^2 B_2\varepsilon}{2\lambda - c}\cos[2(\lambda v - A) - (cv - \varpi)] + \ldots;\end{aligned}$$

on aura ensuite

$$
\begin{aligned}
1-2\rho+3\rho^2-4\rho^3 = 1 &- 2A_0 + 3A_0^2 + \tfrac{3}{2}A_2^2 + \tfrac{3}{2}B_1^2\varepsilon^2 + \tfrac{3}{2}B_2^2\varepsilon^2 + \ldots \\
&- 2A_1\cos 2(gv-\theta) - 2A_3\cos(c'v'-\varpi') \\
&+ (-2A_2 + 6A_0A_2 + 3B_1B_2\varepsilon^2 + 3B_1B_3\varepsilon^2)\cos(\lambda v - A) \\
&+ (-2B_1\varepsilon + 6A_0B_1\varepsilon + 3A_2B_2\varepsilon + 3A_2B_3\varepsilon - 3B_1^3\varepsilon^3)\cos(cv-\varpi) \\
&+ (-2B_2\varepsilon + 6A_0B_2\varepsilon + 3A_2B_1\varepsilon)\cos[\lambda v - A - (cv-\varpi)] \\
&+ (-2B_3\varepsilon + 6A_0B_3\varepsilon + 3A_2B_1\varepsilon)\cos[\lambda v - A + (cv-\varpi)] \\
&\qquad\qquad + \tfrac{3}{2}B_1^2\varepsilon^2\cos 2(cv-\varpi) + \ldots.
\end{aligned}
$$

Finalement, en ne gardant que les termes dont les arguments sont o, $cv-\varpi$, $2(cv-\varpi)$, $2(gv-\theta)$, $\lambda v - A$, $\lambda v - A - (cv-\varpi)$, $c'v'-\varpi'$, c'est-à-dire ceux qui fournissent les quatre grandes inégalités du mouvement de la Lune en longitude : équation du centre, évection, variation et équation annuelle, il vient

$$
\begin{aligned}
\frac{n\,dt}{dv} = p^{\frac{3}{2}}\Big\{ & 1 - 2A_0 + 3A_0^2 + \frac{3}{2}A_2^2 + \frac{3}{2}B_1^2\varepsilon^2 + \frac{3}{2}B_2^2\varepsilon^2 + \frac{3\mu^2}{2\lambda}(1-4A_0)A_2 + \ldots \\
& + \cos(cv-\varpi)\Big[-2B_1\varepsilon + 6A_0B_1\varepsilon + 3A_2B_2\varepsilon \\
& \qquad + 3A_2B_3\varepsilon - 3B_1^3\varepsilon^3 + \frac{3\mu^2}{2\lambda}(1-4A_0)B_2\varepsilon \\
& \qquad + \frac{3\mu^2}{2\lambda}(1-4A_0)B_3\varepsilon + \frac{3\mu^2B_2\varepsilon}{c}(1-2A_0) + \ldots\Big] \\
& + \cos 2(cv-\varpi)\big[\tfrac{3}{2}B_1^2\varepsilon^2 + \ldots\big] + \cos 2(gv-\theta)[-2A_1] \\
& + \cos(\lambda v - A)\Big[-2A_2 + 6A_0A_2 + 3B_1B_2\varepsilon^2 \\
& \qquad + 3B_1B_3\varepsilon^2 - \frac{3\mu^2}{2\lambda}(1-4A_0)(1-2A_0) + \ldots\Big] \\
& + \cos[\lambda v - A - (cv-\varpi)]\Big[-2B_2\varepsilon + 6A_0B_2\varepsilon + 3A_2B_1\varepsilon \\
& \qquad + \frac{3\mu^2}{2\lambda}(1-4A_0)B_1\varepsilon \\
& \qquad + \frac{3\mu^2B_1\varepsilon}{\lambda-c}(1-2A_0) + \ldots\Big] \\
& + \cos(c'v'-\varpi')[-2A_3] + \ldots\Big\},
\end{aligned}
$$

formule dans laquelle ont été omis les termes d'influence comparable à ceux négligés dans les calculs précédents.

BIBLIOGRAPHIE

(1858-1885).

N. B. — Pour ne pas allonger indéfiniment cette liste, on a laissé de côté presque tous les Mémoires relatifs aux mouvements continus sans rotation élémentaire.

I. — Traités généraux et Collections de Mémoires étrangers.

1877. KIRCHHOFF...... Vorlesungen über mathematische Physik. — Zweite Auflage. (Leipsig, Teubner.)

1879. H. LAMB........ A Treatise on the mathematical theory of the motion of fluids. (Cambridge, University Press.)

1879. STOKES......... Mathematical and physical Papers. (Cambridge, University Press.)

1882. HELMHOLTZ...... Wissenschaftliche Abhandlungen. (Leipsig, Barth.)

1882. KIRCHHOFF...... Gesammelte Abhandlungen. (Leipsig, Barth.)

1883. J.-J. THOMSON... A Treatise on the motion of vortex-rings. (London, Macmillan.)

1883. Sir W. THOMSON and TAIT.... Treatise on natural Philosophy. New edition. (Cambridge, University Press.)

II. — Équations générales de l'Hydrodynamique.

1827. CAUCHY......... Mémoire sur la théorie des ondes. (*Mém. Sav. étr.*)

1857. CLEBSCH........ Ueber eine allgemeine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen. (*Crelle J.*, LIV.)

1858. HELMHOLTZ..... Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. (*Crelle J.*, LV.)

1859. CLEBSCH........ Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen. (*Crelle J.*, LVI.)

1862. STEFAN......... Ueber die Bewegung flüssiger Körper. (*Sitz. Ak. Wiss. Wien.*, XLVI.)

1868. J. BERTRAND.. et HELMHOLTZ Discussion. (*C. R.*, LXVI, LXVII.)

1868. W. THOMSON.... On vortex motion. (*Tr. R. S. Ed.*, XXV.)

1868. Weber......... Ueber eine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen. (*Crelle J.*, LXVIII.)

1870. Cockle......... On the motion of fluids. (*Q. J.*, X-XI.)

1870. Veltman........ Die Helmholz'sche Theorie der Flüssigkeitswirbel. (*Schlöm. Zeitsch. f. Math. Phys.*, XV.)

1871-1872-1873. Beltrami. Sui principii fundamentali dell' Idrodinamica razionale (1re, 2^{e}, 3^{e} P.). (*Mem. di Bologna*, I, II, III.)

1873. Bobylew........ Einige Betrachtungen über die Gleichungen der Hydrodynamik. (*Clebsch Ann.*, VI.)

1874. E. Beltrami .... Sui principii fundamentali dell' Idrodinamica razionale (4^{e} P.). (*Mem. di Bologna*, V.)

1876. Beltrami....... Intorno al moto piano di un disco ellitico in fluido. (*Rend. Bologna*, 1875-1876.)

1876. Cotterill...... On the distribution of energy in a mass of liquid in a state of steady motion. (*Ph. Mag.*, I.)

1877. Hicks.......... Quaternion investigations on strains and fluid motion. (*Q. J.*, XIV.)

1878. Lamb........... On the conditions of steady motion of a fluid. (*Pr. L. M. S.*, IX.)

1879. Muller......... Einleitung in die Hydrodynamic. (*Wolf Zeitsch.*, XXVIII.)

1880. Graetz......... Ueber Wirbelbewegungen in compressiblen Flüssigkeiten. (*Schlöm. Zeitsch. f. Math. Phys.*, XXV.)

1880. Hill........... Some properties of the equations of Hydrodynamics. (*Q. J.*, XVII.)

1880. Rowland........ On the motion of a perfect incompressible fluid, when no solid bodies are present. (*Am. J.*, III.)

1880. Margules....... Ueber discrete Wirbelfäden. (*Wien. Ber.*, LXXXI.)

1881. Craig.......... Methods and Results. — General properties of the equations of steady motion. (*U. St. Coast and Geodetic Survey.*)

1881. Hicks.......... Report on recent progress in Hydrodynamics. (*Br. Ass. Rep.*)

1881. Paci........... Sopra una trasformazione delle equazioni fondamentali della Idrodinamica. (*N. Cim.*, IX.)

1883. Gilbert........ Transformation des équations de l'Hydrodynamique. (*Ann. Soc. Sc. Brux.*, VII.)

1884. Bjerkness....... Les équations hydrodynamiques et les relations supplémentaires (*Acta math.*, IV).

1885. Lamb........... Hydrodynamical theorem. (*Mess.*, XIV.)

1885. Nanson......... Note on Hydrodynamics. (*Mess.*, XIV.)

III. — Expériences sur les tourbillons.

1858. W. Rogers..... On the formation of rotating rings by air and liquids under certain conditions of discharge. (*Am. J. Arts and Sc.*, XXVI.)

1860. Reusch......... Ueber Ringbildung in Flüssigkeiten. (*Pogg. Ann.*, CX.)

1864. Tomlinson...... On a new variety of cohesion figures. (*Ph. Mag.*, XXVII, XXVIII.)

1868. Ball........... On vortex rings in air. (*Ph. Mag.*, XXXVI.) — Sur les couronnes de fumée. (*Ann. Ch. Ph.*, XV.) — Sur les anneaux tourbillons dans l'air. (*Les Mondes*, XVII.)

1871. Ball........... Experiments upon the retardation experienced by vortex rings of air when moving through air. (*Ph. Trans. Ir. Ac.*, XXV.) — Account of experiments upon the resistance of air to the motion of vortex-rings. (*Ph. Mag.*, XLII.)

1871. Deacon......... Ring vortices in water. (*Chem. news*, XXIV.)

1876. O. Reynolds.... On the resistance encontered by vortex-rings, and the relation between the vortex-rings and streamlines of a disc. (*Nat.*, XIV.)

1876. O. Reynolds.... On the action of rain to calm the sea. (*Proc. Manch. Soc.*, XIV.)

1877. O. Reynolds.... On vortex in fluids. (*Nat.*, XV.)

1877. Trowbridge..... On liquid vortex-rings. (*Ph. Mag.*, III.)

1879. Giesen......... Oscillationen einer homogenen Flüssigkeitsmasse in Folge ihrer Oberflächenspannung. (*Schlöm. Zeitsch. f. Math. Phys.*, XXIV.)

1881. Gœbhardt...... Sur les tourbillons annulaires des liquides et des gaz. (*Ass. fr.*, 1879; *La Nat.*)

1885 J.-J. Thomson and Newall. On the formation of vortex-rings by drops falling into liquids and some allied phenomena. (*Pr. R. S. L.*, XXXIX.)

IV. — Mouvement sans rotation des fluides autour des solides.

1863. Rankine........ On plane water lines in two dimensions. (*Ph. Trans.*)

1864. Rankine........ Summary of the properties of certain stream lines. (*Ph. Mag.*, XXVIII.)

1870. Maxwell....... On the displacement in a case of fluid motion. (*Pr. L. M. S.*, III.)

1871. Rankine........ On the mathematical theory of stream lines, especially with four foci and upwards. (*Ph. Tr. R. S. L.*, CLXI.)

1874. F.-D. Thomson.. Some cases of fluid motion. (*Mess.*, III, IV.)

1874. Ferrers........ On the motion of a mass of water about a moving cylinder. (*Q. J.*, XIII.)

1875. Ferrers........ On the motion of an infinite mass of water about a moving ellipsoïd. (*Q. J.*, XIII.)

1877. Lamb........... On some hydrodynamical solutions. (*Q. J.*, XIV.)

1878. Beltrami....... Intorno ad un caso di moto a due coordinate. (*Rend. Inst. Lomb.*, XI.)

1878. Ferrers........ Solution of certain questions in potentials and motion of liquids. (*Q. J.*, XIV.)

1878. Greenhill...... Fluid motion in a rotating quadrantal cylinder. (*Mess.*, VIII.)

1878. Hicks.......... On velocity and electric potentials between parallel planes. (*Q. J.*, XV.)

1878. Hicks.......... Fluid motion in a rotating semicircular cylinder. (*Mess.*, VIII.)

1879. Greenhill...... Fluid motion between confocal elliptic cylinders and confocal ellipsoïds. (*Q. J.*, XVI.)

1879. Greenhill...... Fluid motion in a rotating rectangle formed by two concentric circular arcs and two radii. (*Q. J.*, XVI.)

1880. Ferrers........ On the motion of water contained in certain cylindrical vessels and on certain analytical theorems connected with that problem. (*Q. J.*, XVII.)

1880. Hicks.......... On functional images in ellipses. (*Q. J.*, XVII.)

1881. Hicks.......... On toroidal functions. (*Ph. Tr. Lond.*, CLXX.)

1881. Routh.......... Some applications of conjugate functions. (*Pr. L. M. S.*, XIII.)

1882. Saint-Venant... Mouvement dans un vase d'où sort un liquide par un petit trou. (*C. R.*, XCIV.)

1883. Basset......... On the motion of a liquid in and about cylinders whose transverse sections are the inverses of confocal ellipses with respect to their centre. (*Q. J.*, XIX.)

1883. Basset......... On certain physical problems connected with surfaces which are the inverses of ellipsoïds of revolution. (*Q. J.*, XIX.)

1885. Basset......... On the velocity potential due to the motion of an infinite liquid about a spherical bowl. (*Pr. L. M. S.*, XVI.)

V. — Mouvements des tourbillons dans les liquides. — Vibrations. — Vortex-atomes.

1867. W. THOMSON.... Vortex-atoms. (*Pr. R. S. Ed.*, VI; *Ph. Mag.*, XXXIV.)

1875. W. THOMSON.... On two-dimensional motion of mutually influencing vortex columns and on two-dimensional approximately motion of a liquid. — Titre seul. (*Pr. Ed. S.*, IX.)

1876. W. THOMSON.... On vortex motion. — On the ultramundane corpuscules of Lesage. (*Proc. Ed. S.*, VII; *Ph. Mag.*, 5ᵉ série, I.)

1876. W. THOMSON.... A mechanical illustration of the vibrations of a triad of columnar vortices. — Titre. (*Proc. R. S. Ed.*, IX.)

1876. W. THOMSON.... On the vortex theory of gases, of the condensation of gases on solids and of the continuity between the gaseous and liquid state of matter. — Titre. (*Pr. R. S. Ed.*, IX.)

1877. GREENHILL...... Plane vortex motion. (*Q. J.*, XV.)

1877. GRŒBLI......... Specielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden. (*Wolff Zeitsch.*, XXII.)

1878. COATES......... Vortex motion in and about elliptic cylinders. (*Q. J.*, XV, XVI.)

1879. COATES......... On circular vortex-rings. (*Q. J.*, XVI.)

1879. LEWIS.......... On the images of vortices in a spherical vessel. (*Q. J.*, XVI.)

1879. LEWIS.......... Some cases of vortex motion. (*Mess.*, IX.)

1880. W. THOMSON.... Vibrations of columnar vortex. (*Pr. Ed.*, X; *Ph. Mag.*, X.)

1880. W. THOMSON.... On vortex statics. (*Ph. Mag.*, X.)

1880. W. THOMSON.... On an experimental illustration of minimum energy in vortex motion. (*Br. Ass. Rep.*; *Nat.*, XXIII.)

1882. J.-J. THOMSON... On the vibrations of a vortex-ring and the action upon each other of two vortices in a perfect fluid. (*Ph. Tr. L.*, CLXXIII.)

1883. HICKS.......... On the steady motion of a hollow vortex. (*Pr. R. S. L.*, XXXV.)

1884. HICKS.......... On the steady motion and small vibrations of a hollow vortex. (*Ph. Tr. L.*, CLXXV.)

1884. HILL........... The differential equations of cylindrical and annular vortices. (*Pr. L. M. S.*, XVI.)

1885. J.-J. THOMSON .. The vortex-ring theory of gases. On the law of the distribution of energy among the molecules. (*Pr. R. Soc. L.*, XXXIX.)

VI. — **Mouvement d'un solide non percé dans un liquide.**

1852. Dirichlet....... Ueber einige Fälle in welchen sich die Bewegung eines festen Körpers in einem incompressibeln flüssigen Medium theoretisch bestimmen lässt. (*Berl. Monatsber.*)

1854. Hoppe.......... Vom Widerstande der Flüssigkeiten gegen die Bewegung fester Körper. (*Pogg. Ann.*, XCIII.)

1856-1857. Clebsch.... Ueber die Bewegung eines Ellipsoïds in einer tropfbaren Flüssigkeit. (*Crelle J.*, LII et LIII.)

1870. Clebsch........ Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. (*Math. Ann.*, III.)

1870. Kirchhoff...... Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit. (*J. Borch.*, LXXI; *Abh.*)

1870. W. Thomson.... On the forces experienced by solids immersed in a moving liquid. (*Pr. R. S. Ed.*, VII.)

1871. W. Thomson.... Hydrokinetic solutions and observations. On the motion of free solids through a liquid. (*Pr. R. S. Ed.*, VII; *Ph. Mag.*, XLII.)

1873. Bjerkness...... Verallgemeinerung des Problems von dem ruhenden Ellipsoid in einer bewegten unendlichen Flüssigkeit. (*Gött. Nachr.*)

1873. Bjerkness...... Verallgemeinerung des Problems von den Bewegungen welche in einer ruhenden, unelastischen Flüssigkeit die Bewegung eines Ellipsoïds hervorbringt. (*Gött. Nachr.*)

1873. Michaelis....... Mouvement d'un solide dans un liquide. (*Arch. néerl.*, VIII.)

1877. Lamb........... On the motion of a solide through an infinite mass of liquid. (*Pr. L. M. S.*, VIII.)

1877. Kopcke........ Zur Discussion der Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit. (*Math. Ann.*, XII.)

1877. Lord Rayleigh .. On the irregular flight of a tennis-ball. (*Messenger*, VII.)

1878. Greenhill...... On the motion of a top and allied problems in Dynamics. (*Q. J.*, XV.)

1878. Purser......... On the applicability of Lagrange's equations in certain cases of fluid motion. (*Ph. Mag.*, 5[e] série, VI.)

1879. Craig.......... On the motion of a solid in a fluid. (*Am. J.*, II.)

1879. Craig.......... On the motion of an ellipsoïd in a fluid. (*Am. J.*, II.)

1879. Greenhill...... Notes on Hydrodynamics. (*Mess.*, IX.)

1880. Greenhill...... On the steady motion of a top and of a solid of revolution moving in an infinite liquid. (*Q. J.*, XVII.)

1882. LAMB........... On the forces experienced by a solid moving in an infinite mass of liquid. (*Q. J.*, XIX.)

1882. SCHULKE........ Die Bewegung eines Rotationskörpers in einer incompressiblen Flüssigkeit. (*Arch. f. Math. Phys.*, LXVIII.)

1882 WEBER......... Anwendung der Thetafunctionen zwei Veränderlicher auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. (*Math. Ann.*, XIV.)

1883. KOLACECK....... Ueber Schwingungen fester Körper in Flüssigkeiten. (*Wien. Ber.*, LXXXVII.)

VII. — Mouvement d'un solide percé ou de plusieurs solides.

1869. BJERKNESS....... Om omsœtning af oscillatoriske bewœgelser i progressive. (*Vidensk. Selsk. Forhandl.*, XI.)

1869. BJERKNESS....... Om den samtidige bewægelse af kugleformige legemer i incompressibelt fluidum. (*Skand. Naturforsk. Forhandl.*, X.)

1869. KIRCHHOFF...... Ueber die Kräfte welche zwei unendlich dünne starre Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können. (*Crelle J.*, LXXI.)

1871. BOLTZMANN...... Ueber die Druckkräfte welche auf Ringe wirksam sind die in bewegte Flüssigkeit tauchen. (*Crelle J.*, LXXIII.)

1873. BJERKNESS....... Geschichtliche Notizen über das Dirichlet'sche Kugel- und Ellipsoid-Problem. (*Gött. Nachr.*)

1873. W. THOMSON.... On the motion of rigid solids in a liquid circulating irrotationnally through perforations in them or in any fixed solid. (*Proc. R. S. Ed.*, VII; *Ph. Mag.*, XLV.)

1878. HICKS.......... On the motion of two cylinders in a fluid. (*Rep. Br. Ass.*)

1879. HICKS.......... On the motion of two cylinders in a fluid. (*Q. J.*, XVI.)

1879. GODECKER........ Die Bewegung eines kreisförmigen Ringes in einer unendlichen incompressiblen Flüssigkeit. (Göttingen.)

1880. HICKS.......... On the condition of steady motion of two cylinders in a fluid. (*Q. J.*, XVII.)

1880. HICKS.......... On the problem of two pulsating spheres in a fluid. (*Pr. M. S. Cambr.*, IV.)

1880. HICKS.......... On the motion of two spheres in a fluid. (*Ph. Tr.*, CLXXI.)

VIII. — Mouvements discontinus.

1868. HELMHOLTZ...... Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen. (*Berl. Mon.; Abh.*)

1869. [illegible] Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. *J. Borch.*, LXX.

1873. Helmholtz. Zu Theorem über geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper nebst Anwendungen auf das Problem Luftballons zu lenken. *Berl. Mon.* [illegible]

1876. Hoskin and [illegible] [illegible] *Proc. L. M. S.*, [illegible]

1876. Lord Rayleigh. Notes on Hydrodynamics. — On the resistance of fluids. (*Ph. Mag.*, II.)

1877. [illegible] [illegible] über die mit dem [illegible] [illegible] [illegible] *Brioschi Ann.*, VIII.

1877. [illegible] Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegung. *Pogg.* [illegible]

1879. [illegible] Vortex sheets. *Q. J.*, XVI.

1884. [illegible] Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen. *Wied. Ann.*, XXI.

1884. [illegible] Ueber stationäre Strömung auf krummen Flächen. *Beibl.*

1884. Tait. On vortex motion. (*Pr. R. S. Ed.*, XII.)

1885. [illegible] Studien der Flüssigkeitsbewegungen. *Wied. Ann.*, XXVI.

IX. Stabilité des mouvements tourbillonnaires et discontinus.

1871. W. Thomson.... On the influence of wind on waves in water supposed frictionless. (*Ph. Mag.*, 4e série, XLII.)

1876. W. Thomson.... On vortex vibrations and on instability of vortex motions. — Titre. (*Proc. R. S. Ed.*, IX.)

1878. Rayleigh....... On the instability of jets. (*Pr. L. M. S.*, X.)

1878. Rayleigh....... On the stability or instability of certain fluid motions. (*Pr. L. M. Soc.*, XI.)

1880. W. Thomson.... On a disturbing infinity in lord Rayleigh's solution for waves in a plane vortex stratum. (*Nat.*, XXIII.)

1880. W. Thomson.... On maximum and minimum energy in vortex motion. (*Br. Ass. Rep.*; *Nat.*, XXII.)

1882. Rayleigh....... Liquid jets. (*Pr. R. S. L.*, XXXIV.)

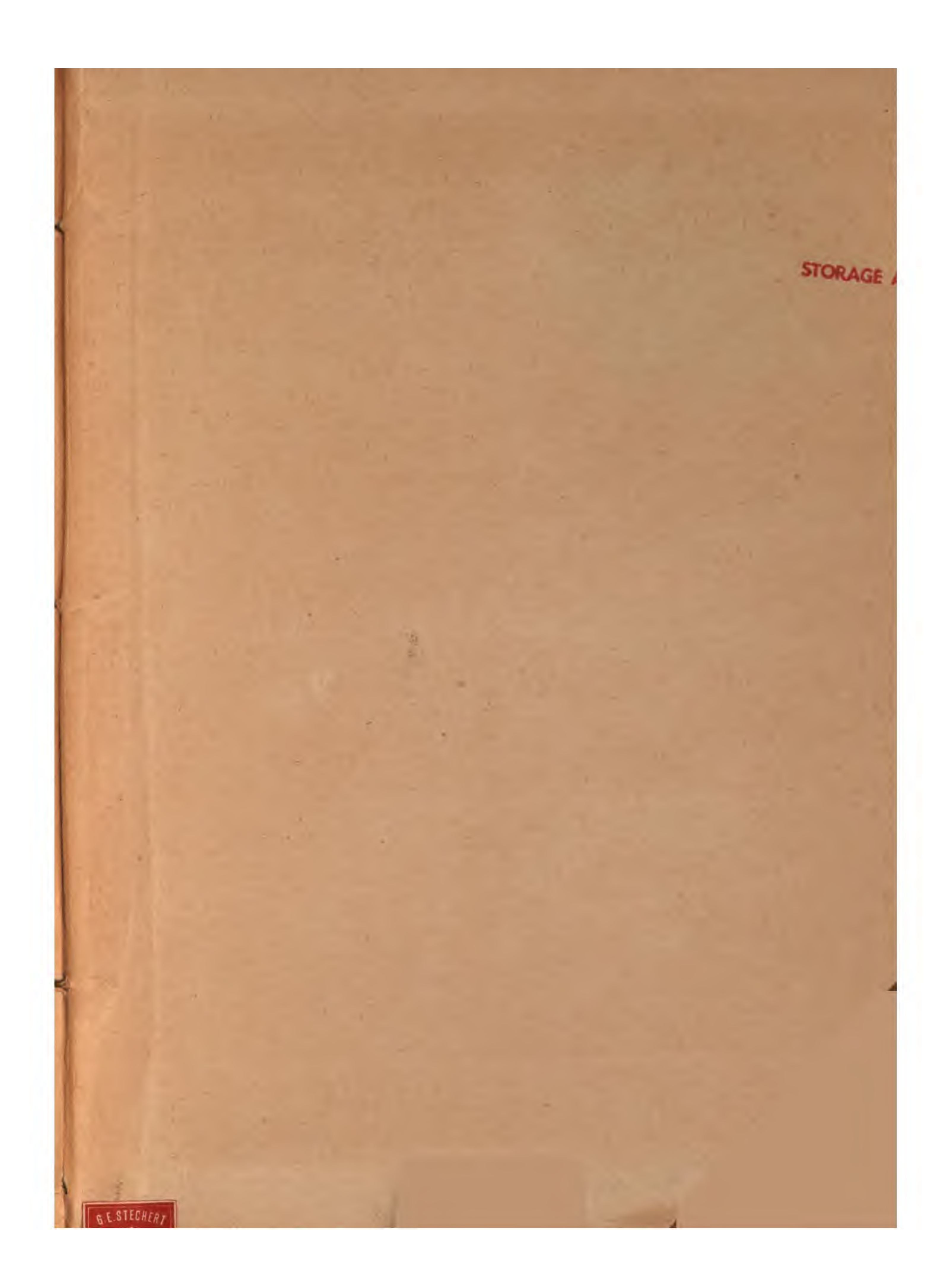
TABLE DES MATIÈRES

DU TOME PREMIER.

REVUE DE PHYSIQUE.

FIN DU TOME PREMIER.

13495 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.


STORAGE
G.E.STECHERT

